

Correction du DS n°2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

14 Septembre 2026

Exercice n°1 - EML 2020

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

RÉPONSE:

- La fonction f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ car elle est le quotient $f = \frac{f_1}{f_2}$ où :
 - $f_1 : x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ car elle est la composée $f_1 = g_2 \circ g_1$ où :
 - $g_1 : x \mapsto 1-x$ est :
 - * de classe C^∞ sur $]0, 1[$,
 - * telle que : $g_1([0, 1]) \subseteq]0, 1[$.
 - $g_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^∞ sur $]0, 1[$.
 - $f_2 : x \mapsto \ln(x)$:
 - est de classe C^∞ sur $]0, 1[$,
 - NE S'ANNULE PAS sur $]0, 1[$.

La fonction f est de classe C^∞ sur $]0, 1[$ donc en particulier dérivable.

- Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{1-x} \ln(x) - \ln(1-x) \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\frac{-x(1-x)}{1-x} \ln(x) - \ln(1-x) \frac{x(1-x)}{x}}{x(1-x)(\ln(x))^2} \\ &= \frac{-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)}{x(1-x)(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

On a bien : $\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)).$

* * *

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$

RÉPONSE:

Soit $t \in]0, 1[$. Alors $\ln(t) < 0$ (par définition de la fonction $\ln$) donc $t \ln(t) < 0$ (par multiplication par $t > 0$)

$$\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$$

* * *

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

RÉPONSE:

Soit $x \in]0, 1[$.

• D'après la question 1, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

Or : $x > 0, 1-x > 0$ et $(\ln(x))^2 > 0$. Ainsi : $x(1-x)(\ln(x))^2 > 0$.

On en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de la quantité $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x)$.

- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = x \in]0, 1[$, on obtient : $x \ln(x) < 0$ et donc $-x \ln(x) > 0$.
- En utilisant la propriété de la question précédente pour $t = 1-x \in]0, 1[$, on obtient : $(1-x) \ln(1-x) < 0$ et donc $-(1-x) \ln(1-x) > 0$.

Ainsi : $-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x) > 0$.

On en déduit : $\forall x \in]0, 1[, f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, 1[$.

* * *

3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.

RÉPONSE:

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.
- Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0 \times 0 = 0$$

La fonction f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

* * *

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

RÉPONSE:

Soit $x \in]0, 1[$.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x \ln(x)} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{x \ln(x)} = \frac{-1}{\ln(x)}$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\ln(x)} = 0$.

La fonction taux d'accroissement $\tau_0(f)$ admet donc une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$.

On en conclut que la fonction f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.

* * *

4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

RÉPONSE:

- Tout d'abord, comme $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(x)} = -\infty$.
- En posant $t = 1 - x$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 - x) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) = -\infty$.

On en déduit, par produit de limites :

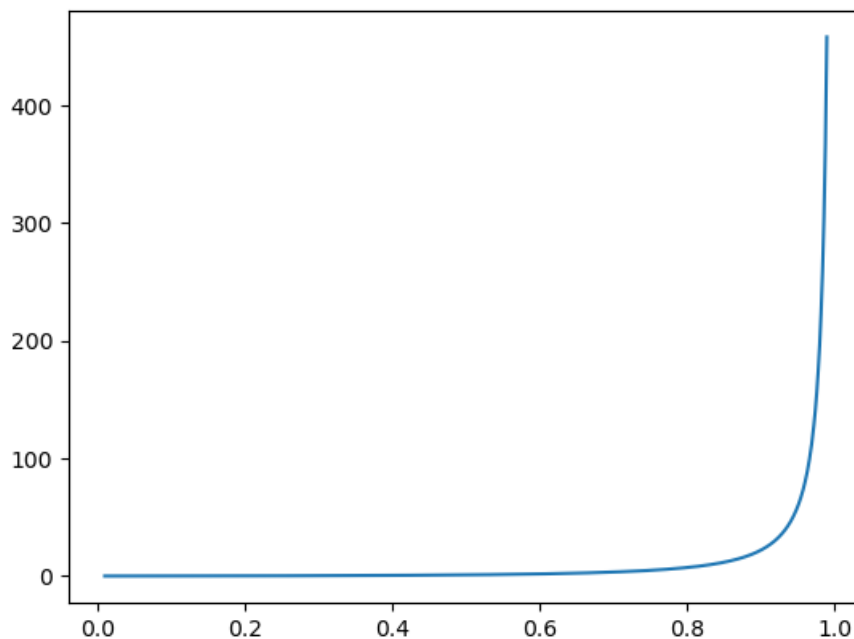
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 - x)}{\ln(x)} = +\infty$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe de f .

* * *

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

RÉPONSE:



* * *

Exercice n°2 - EDHEC 2020

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

On vérifie les conditions successives :

- L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Il est non vide car la matrice nulle appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: ${}^t0 = 0 = -0$.
- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + \mu B) &= \lambda {}^tA + \mu {}^tB \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= -\lambda A - \mu B \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= -(\lambda A + \mu B) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda A + \mu B$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* * *

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

RÉPONSE:

Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} {}^tf(M) &= {}^t[({}^tA)M + MA] \\ &= {}^tM {}^t({}^tA) + {}^tA {}^tM \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB {}^tA \text{ pour tout } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ &= {}^tMA + {}^tA {}^tM \quad \text{car } {}^t({}^tA) = A \\ &= -MA - {}^tAM \quad \text{car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= -[MA + {}^tAM] \\ &= -f(M) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f(M)$ est une matrice antisymétrique

* * *

- (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

Montrons que f est linéaire. Soient $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ quelconques. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= {}^t A(\lambda M + \mu N) + (\lambda M + \mu N)A \\ &= (\lambda {}^t A M + \mu {}^t A N) + (\lambda M A + \mu N A) \\ &= \lambda ({}^t A M + M A) + \mu ({}^t A N + N A) \\ &= \lambda f(M) + \mu f(N) \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est linéaire. De plus, on a vu à la question précédente que $f(M)$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ quel que soit M dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent,

f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

RÉPONSE:

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &\iff {}^t M = -M \\ &\iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \{ bJ + cK + fL, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \text{Vect}(J, K, L) \end{aligned}$$

Donc la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

RÉPONSE:

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha J + \beta K + \gamma L = 0 &\iff \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille (J, K, L) est libre.

On en déduit, avec le résultat de la question précédente, que c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a

$$\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$$

4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

RÉPONSE:

On calcule :

$$\begin{aligned}f(J) &= {}^tAJ + JA \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } f(J) = -J - L$$

De même :

$$\begin{aligned}f(K) &= {}^tAK + KA \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Et enfin

$$\begin{aligned} f(L) &= {}^tAL + LA \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L$$

(b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$

RÉPONSE:

On détermine l'image de f :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) \quad \text{car } (J, K, L) \text{ est une base de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \\ &= \text{Vect}(-J - L, 0, -L) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \text{Vect}(-J - L, -L) \\ &= \text{Vect}(J + L, L) \quad \text{(on change les vecteurs en leurs opposés)} \\ &= \text{Vect}(J, L) \quad \text{(on soustrait le deuxième au premier)} \end{aligned}$$

Or, la famille (J, L) est libre (puisque (J, K, L) l'est).

Par conséquent, (J, L) est une base de $\text{Im}(f)$.

(c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

RÉPONSE:

D'après la question précédente, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Donc, par le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(f)) &= \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) \\ &= 3 - 2 \end{aligned}$$

soit $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

Or, $f(K) = 0$ (cf question 4.(a)), donc K appartient à $\text{Ker}(f)$. Ainsi, la famille (K) est une famille libre (elle est constituée d'un seul vecteur non nul) constituée d'éléments de $\text{Ker}(f)$, et de cardinal $\dim(\text{Ker}(f))$.

La famille (K) est une base de $\text{Ker}(f)$.

5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base B . On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$

RÉPONSE:

D'après la question 4.(a), la matrice F de f dans la base (J, K, L) est

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On constate bien que tous ses coefficients appartiennent à $\{-1; 0\}$.

(b) (*) En déduire les valeurs propres de f

RÉPONSE:

La matrice F est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, F et f ont le même spectre. Or, F est une matrice triangulaire inférieure. Ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux.

Les valeurs propres de F , et donc de f , sont -1 et 0 .

(c) (*) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

RÉPONSE:

Le rang de $f + Id$ est le rang de sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire le rang de $F + I_3$. Or, $F + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2. En effet, en permutant la première et la troisième ligne, on obtient une matrice échelonnée ayant exactement 2 lignes non nulles. Par conséquent,

$$\text{rg}(f + Id) = 2$$

D'après le théorème du rang, comme à la question 4.(c), on en déduit que $\dim(\text{Ker}(f + Id)) = 1$. Autrement dit, la dimension de l'espace propre de f associé à la valeur propre -1 est 1. Par ailleurs, la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $\dim(\text{Ker}(f))$, c'est-à-dire 1 aussi. La somme des dimensions des espaces propres de f est donc $1 + 1 = 2$, ce qui n'est pas égal à la dimension de l'espace $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ (qui vaut 3).

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

Exercice n°3 - EDHEC 2020

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

RÉPONSE:

Dans le cas où $n = 1$, X ne prend que la valeur 1. On pioche donc une boule dans l'urne V , boule qui a une probabilité p d'être blanche. Ainsi, Y prend la valeur 1 avec la probabilité p , et 0 avec la probabilité $1 - p$.

Autrement dit, lorsque $n = 1$, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p

* * *

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

Il y a une boule portant chaque numéro entre 1 et n . Chaque numéro a donc la même probabilité d'être tiré.

Par conséquent, X suit une loi uniforme dans $\llbracket 1; n \rrbracket$

D'après le cours, on a alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

* * *

3. Soit k un élément de $[1, n]$. Justifier que $P_{(X=k)}(Y=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq i \leq k \end{cases}$

RÉPONSE:

Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors on tire k boules dans l'urne V . Dans ce cas, la variable aléatoire Y compte donc le nombre de succès (tirer une boule blanche) à une succession de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec une probabilité de succès égale à p .

Par conséquent, la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$.

Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $P_{(X=k)}(Y=i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$

* * *

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
- `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
 - `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .
 - `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p .
 - `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
n=int(input ('entrez la valeur de $n:$ '))
p=float(input ('entrez la valeur de $p:$ '))
X=...
Y=...
```

RÉPONSE:

```
n=int(input ('entrez la valeur de $n:$ '))
p=float(input ('entrez la valeur de $p:$ '))
X=rd.randint(1,n+1)
Y=rd.binomial(X,p)
```

* * *

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[0, n]$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

RÉPONSE:

Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à k . Or, X peut prendre les valeurs de 1 à n . Donc $Y(\Omega) = \bigcup_{k=1}^n \llbracket 0; k \rrbracket$, c'est-à-dire $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $([X = k])_{1 \leq k \leq n}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = 0) \quad (\text{question 2}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} q^k \quad (\text{question 3}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k \end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q , avec $q \neq 1$. D'où

$$P(Y = 0) = \frac{1}{n} \times \frac{q(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

* * *

- (b) Écrire, pour tout i de $[1, n]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

RÉPONSE:

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ quelconque. On a de même, par la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $([X = k])_{1 \leq k \leq n}$:

$$\begin{aligned} P(Y = i) &= \sum_{k=1}^n P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i) \quad (\text{question 2}) \\ &= \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i) \quad \text{car } P_{(X=k)}(Y = i) = 0 \text{ si } k < i \text{ (cf question 3)} : \end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après la question 3 :

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

* * *

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

RÉPONSE:

Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. On a alors :

$$\begin{aligned} i \binom{k}{i} &= i \frac{k!}{(k-i)!i!} \\ &= \frac{k!}{(k-i)!(i-1)!} \\ &= k \frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!} \\ &= k \frac{(k-1)!}{((k-1)-(i-1))!(i-1)!} \end{aligned}$$

$$\text{Ce qui donne bien : } i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

- (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

RÉPONSE:

La variable aléatoire Y ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Elle admet donc une espérance. Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^n iP(Y=i) \quad \text{car } Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \\ &= \sum_{i=1}^n iP(Y=i) \quad (\text{le terme pour } i=0 \text{ est nul}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad (\text{question 5.(b)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad (\text{on permute les deux sommes, attention aux bornes !}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad (\text{question 6.(a)}) \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

* * *

(c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$

RÉPONSE:

Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ quelconque. On commence par calculer la somme intérieure :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-1-j} \quad (\text{changement d'indice } j = i - 1) \\ &= p \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} \\ &= p(p+q)^{k-1} \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= p \times 1^{k-1} \\ &= p \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (kp) \\ &= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}.$$

* * *

7. (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

RÉPONSE:

On procède comme aux questions 6.(a) et 6.(b). Soit i et k deux entiers naturels tels que $2 \leq i \leq k \leq n$. On a alors :

$$\begin{aligned} i(i-1) \binom{k}{i} &= i(i-1) \frac{k!}{(k-i)!i!} \\ &= \frac{k!}{(k-i)!(i-2)!} \\ &= k(k-1) \frac{(k-2)!}{(k-i)!(i-2)!} \\ &= k(k-1) \frac{(k-2)!}{((k-2)-(i-2))!(i-2)!} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $i(i-1)\binom{k}{i} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$. Ensuite, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
 E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^n i(i-1)P(Y=i) \quad (\text{théorème du transfert}) \\
 &= \sum_{i=2}^n i(i-1)P(Y=i) \quad (\text{les termes pour } i=0 \text{ et } i=1 \text{ sont nuls}) \\
 &= \sum_{i=2}^n \left(\frac{i(i-1)}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \quad (\text{question 5.(b)}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^k i(i-1) \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad (\text{on permute les deux sommes}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^k k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \quad (\text{cf calcul ci-dessus})
 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right) .}$$

* * *

(b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

RÉPONSE:

On procède comme à la question 6.(c). On commence par simplifier la somme intérieure :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^{j+2} q^{k-2-j} \quad (\text{changement d'indice } j = i-2) \\
 &= p^2 \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} \\
 &= p^2 (p+q)^{k-2} \quad (\text{binôme de Newton}) \\
 &= p^2 \times 1^{k-2} \\
 &= p^2
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k(k-1)p^2) = \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^n k(k-1) \\
 &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\
 &= \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)((2n+1) - 3)}{6} \\
 &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \\
 &= \frac{p^2}{n} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \\
 &= \frac{(n+1)(n-1)p^2}{3}
 \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}.$$

(c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

RÉPONSE:

Lorsque $n = 1$, la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{0; 1\}$, donc dans tous les cas $Y(Y-1) = 0$. On en déduit que $E(Y(Y-1)) = 0$. Or, $\frac{(1^2-1)p^2}{3} = 0$ également.

L'expression obtenue à la question précédente reste valable lorsque $n = 1$.

(d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

RÉPONSE:

On a $E(Y(Y-1)) = E(Y^2 - Y) = E(Y^2) - E(Y)$ par linéarité de l'espérance. On en déduit que $E(Y^2) = E(Y(Y-1)) + E(Y)$, puis que

$$V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2.$$

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont continues sur $[0; 1]$ comme quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ce qui justifie l'existence de I_n et de J_n quel que soit $n \in \mathbb{N}$

2. Calculer I_0 et I_1 .

RÉPONSE:

On a $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} + 1$, ce qui donne

$$I_0 = \frac{1}{2}.$$

Ensuite, on a $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx$. Pour calculer cette intégrale, on fait le changement de variable affine $t = 1+x$. On obtient :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= \left[\ln(t) + \frac{1}{t} \right]_1^2 \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2} - 1 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$I_1 = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On a :

$$\begin{aligned}
 I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 1)}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx \\
 &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1
 \end{aligned}$$

Et donc finalement

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

(b) En déduire I_2 .

RÉPONSE:

D'après le résultat précédent, avec $n = 0$, on a $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$, donc $I_2 = 1 - 2I_1 - I_0$. Par conséquent, d'après la question 2, $I_2 = 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$, ce qui donne finalement :

$$I_2 = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

(c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

n=int(input ('donnez une valeur pour n: '))
a=1/2
b=np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a= ...
    b= ...
print(b)

```

RÉPONSE:

```

n=int(input ('donnez une valeur pour n: '))
a=1/2
b=np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a= b
    b= 1/(k-1)-2*a-aux
print(b)

```

* * *

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x \leq 1$, donc $1 \leq 1+x \leq 2$, et donc $1 \leq (1+x)^2 \leq 4$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$, et donc que $0 < \frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$. Par conséquent, on a $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$ (car $x^n \geq 0$), et donc, en intégrant sur $[0; 1]$:

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \, dx \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

Autrement dit : $0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$, c'est-à-dire

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

* * *

(b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

RÉPONSE:

Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on déduit de l'encadrement ci-dessus que

$$\text{la suite } (I_n) \text{ converge et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

* * *

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n \cdot I_{n-1} - \frac{1}{2}$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Alors $I_n = \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx$ où u et v sont les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ définies par : $u(x) = \frac{-1}{1+x}$ (ce qui donne $u'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$) et $v(x) = x^n$ (ce qui donne $v'(x) = nx^{n-1}$). On peut donc faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[u(x)v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\ &= \left[\frac{-x^n}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} \, dx \\ &= \frac{-1}{2} + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \, dx \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$$

* * *

6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n

RÉPONSE:

En ce qui concerne J_0 , on a directement $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1$, c'est-à-dire $J_0 = \ln(2)$.

Remarque : on pouvait aussi utiliser la question précédente, en prenant $n = 1$.

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

- (b) En déduire la valeur de J_1

RÉPONSE:

D'après la question précédente, avec $n = 0$, on a $J_0 + J_1 = 1$, donc $J_1 = 1 - J_0$, c'est-à-dire

$$J_1 = 1 - \ln(2).$$

7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('donnez une valeur pour n: '))
J=np.log(2)
for k in range(1,n):
    J=...
end
I=...
print(I)
```

RÉPONSE:

```
n=int(input('donnez une valeur pour n: '))
J=np.log(2)
for k in range(1,n):
    J=1/k-J
```

```

end
I=n*J-1/2
print(I)

```

* * *

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$

RÉPONSE:

On montre l'égalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, on a $(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -(\ln(2) - 1) = 1 - \ln(2)$ et $J_1 = 1 - \ln(2)$ (cf question 6.(b)).

L'égalité est donc vérifiée pour $n = 1$.

Supposons maintenant l'égalité vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé, et montrons qu'elle est encore vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} \quad \text{d'après la question 6.(a)} \\
 &= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{1}{n+1} \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)
 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

* * *

9. (a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$

RÉPONSE:

D'après la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2}$, donc $J_n = \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$. Or, $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
d'après la question 4.(b), donc $I_{n+1} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, et donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$.

* * *

- (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

RÉPONSE:

D'après la question 8, on a $|J_n| = \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc en particulier $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq |J_n|$, ce qui peut se réécrire :

$$-|J_n| \leq \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \leq |J_n|$$

Or, $J_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (cf question précédente), donc $|J_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ également. On en déduit, par encadrement, que

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(2)$$

La série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

- (c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$

RÉPONSE:

On a vu à la question 9.(a) que $J_n = \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $I_{n+1} + \frac{1}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ et $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$, donc $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}}{n}$, c'est-à-dire

$$J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$

- (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$

RÉPONSE:

D'après la question 8, on a $u_n = (-1)^n J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, d'après la question précédente, on a $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. D'où

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.$$

- (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

RÉPONSE:

On sait (question 9.(b)) que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge. On en déduit que la série de terme général $\frac{-1}{2} \times \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge. Autrement dit,

la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ converge

Malheureusement, cette série n'est pas à termes positifs (ni négatifs). On ne peut donc pas appliquer le critère de convergence par équivalence pour étudier la convergence de la série de terme général u_n . Autrement dit,

on ne peut rien en déduire concernant $\sum u_n$

* * *

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ . Pour tout entier naturel n non nul, on

pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

- (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$

RÉPONSE:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque. D'après la question 8, on a $J_k = (-1)^k u_k$ et $J_{k+1} = (-1)^{k+1} u_{k+1}$. Or, d'après la question 6.(a), on a $J_k + J_{k+1} = \frac{1}{k+1}$, d'où $(-1)^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1} = \frac{1}{k+1}$. En multipliant par $(-1)^k(k+1)$, on obtient alors :

$$(k+1)u_k - (k+1)u_{k+1} = (-1)^k$$

c'est-à-dire

$$ku_k + u_k - (k+1)u_{k+1} = (-1)^k$$

ou encore

$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$

* * *

- (b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On somme l'égalité ci-dessus pour k entre 1 et n . On obtient :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left((k+1)u_{k+1} - ku_k \right) + \sum_{k=1}^n (-1)^k$$

c'est-à-dire

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left((k+1)u_{k+1} - ku_k \right) + \sum_{k=1}^n (-1)^k$$

Or, la somme $\sum_{k=1}^n ((k+1)u_{k+1} - ku_k)$ est une somme télescopique et $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison -1 . On peut donc les calculer. On obtient :

$$S_n = \left((n+1)u_{n+1} - 1u_1 \right) + (-1) \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)}$$

Ce qui se simplifie en :

$$S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

(c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

RÉPONSE:

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^{2n}) \\ &= (2n+1)(-1)^{2n+1}J_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - 1) \\ &= -(2n+1)J_{2n+1} - u_1 \\ &= -(2n+1)J_{2n+1} - (\ln(2) - 1) \end{aligned}$$

Or, $J_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$ d'après la question 9.(c), donc $kJ_k \rightarrow k+\infty \frac{1}{2}$, et donc $(2n+1)J_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$. Par conséquent, $S_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{1}{2} - (\ln(2) - 1)$, c'est-à-dire

$$S_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} - \ln(2).$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^{2n+1}) \\ &= (2n+2)(-1)^{2n+2}J_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)) \\ &= (2n+2)J_{2n+2} - u_1 - 1 \\ &= (2n+2)J_{2n+2} - (\ln(2) - 1) - 1 \\ &= (2n+2)J_{2n+2} - \ln(2) \end{aligned}$$

Or, de même que ci-dessus, on a $(2n+2)J_{2n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$S_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} - \ln(2).$$

On constate que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent et ont la même limite. On en déduit, d'après la propriété admise dans l'énoncé que la suite (S_n) converge vers cette limite.

$$\text{La suite } (S_n) \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln(2).$$

Autrement dit, la série de terme général u_k converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2)$.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

$$(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2 \quad (b) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2 \quad (c) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

RÉPONSE:

D'après la question 9.(b), on a $\ln(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \end{aligned}$$

Le résultat de la question précédente peut donc se réécrire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

C'est la réponse c

* * *