

Exercice n°1 - HEC 2012

Soit m un réel strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

donnée par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$,

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \text{Ker}(f) \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases} \text{ et comme } m \neq 0$$

$$\iff \begin{cases} z = -my \\ 2y = 0 \\ x = -\frac{1}{m}y \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Conclusion : Donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$, donc f bijective et M inversible et $\mathfrak{S}(f) = \mathbb{R}^3$

2. (a) On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 2 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$

(b) Donc $M^2 - M - 2I = 0$ et le polynôme $P = X^2 - X - 2$ est annulateur de M

(c) Donc, si α est valeur propre de M alors $P(\alpha) = 0$ ce qui a pour solutions $\alpha = -1$ et $\alpha = 2$ (ce sont les seules car il n'en a pas plus de 2)

Conclusion : Les seules valeurs propres **possibles** sont donc $\alpha = -1$ et 2 .

Reste à vérifier si elles le sont ou pas :

Pour $\alpha = -1$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(M + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases} \text{ et comme } L_1 = \frac{1}{m^2}L_3 \text{ et } L_2 = \frac{1}{m}L_3$$

$$\iff m^2x + my + z = 0 \iff z = -m^2x - my$$

Les solutions sont donc $E_1 = \text{Vect}((1, 0, -m), (0, 1, -m)) \neq \{0\}$

Conclusion : Donc -1 est bien valeur propre et est associé à $\text{Vect}((1, 0, -m), (0, 1, -m))$

La famille de deux vecteurs non proportionnels $((1, 0, -m), (0, 1, -m))$ est donc génératrice de E_1 et libre. C'est donc une base de E_1 et

Conclusion : $\dim(E_1) = 2$.

Pour $\alpha = 2$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(M - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2} \left(\frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \right) = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m} \left(\frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \right) = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2m}y = 0 \\ \frac{3}{2}mx - \frac{3}{2}y = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ y = mx \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$$

Les solutions sont donc $E_{-2} = \text{Vect}((1, m, m^2))$

Conclusion : Donc -2 est bien valeur propre et est associé à $\text{Vect}((1, m, m^2))$

et $((1, m, m^2))$ en est une famille libre (un seul vecteur non nul) et génératrice, donc une base.

Conclusion : $\dim(E_{-2}) = 1$

Conclusion : Les valeurs propres de M sont donc $\alpha = -1$ et 2 .

La somme des dimensions des sous espaces propres est $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Conclusion : M est donc diagonalisable.

3. La juxtaposition des bases des sous espaces propres $((1, 0, -m), (0, 1, -m), (1, m, m^2))$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc avec $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -m & -m & m^2 \end{pmatrix}$ inversible et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a $M = RDR^{-1}$ et $M^n = RD^nR^{-1}$

avec D diagonale, on a directement D^n .

Il resterait donc à calculer explicitement R^{-1} .

4. (a) On passe par la matrice associée dans la base de vecteurs propres :

$$p \text{ a pour matrice : } P = \frac{1}{3}(D + I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } q \text{ a pour matrice : } Q = -\frac{1}{3}(D - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Les opérations entre matrices diagonales se font sur la diagonale)

On a $QP = 0$ et $PQ = 0$ et $P^n = P$ et $Q^n = Q$ pour $n \geq 1$

Conclusion : $pq = qp = 0$
 $p^n = p$ et $q^n = q$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p^0 = q^0 = I$ pour $n = 0$

- (b) On reconstitue f à partir de p et q : $f = 2p - q$ et comme $p \circ q = qop$ alors par le binôme

$$\begin{aligned} f^n &= (2p - q)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^n (-1)^{n-k} p^k \circ q^{n-k} \text{ suivant } k = 0 \text{ et } n - k = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^n (-1)^{n-k} p \circ q + (-1)^n q + 2^n p \end{aligned}$$

le découpage étant valable pour $n \geq 2$ et encore vrai pour $n = 0$ ($p + q = Id$) et $n = 1$ ($-q + 2p = f$)

Finalement

$$\begin{aligned}
 f^n &= (-1)^n q + 2^n p \\
 &= -\frac{(-1)^n}{3} (f - 2\text{Id}) + \frac{2^n}{3} (f + \text{Id}) \\
 &= \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) f + \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) \text{Id}
 \end{aligned}$$

(c) et sa matrice associée est

$$\text{Conclusion : } \boxed{M^n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) M + \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) I}$$

$$\text{et } a_n = \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) \text{ et } b_n = \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n)$$

(d) Il faut vérifier si le produit par la candidate inverse vaut I :

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) M + \frac{1}{3} (2(-1)^n + 2^n) I \right] \left[\frac{1}{3} (2^{-n} - (-1)^{-n}) M + \frac{1}{3} (2(-1)^{-n} + 2^{-n}) I \right] \\
 &= \frac{1}{9} (2^n - (-1)^n) (2^{-n} - (-1)^{-n}) M^2 + \frac{1}{9} (2^n - (-1)^n) (2(-1)^{-n} + 2^{-n}) M \\
 &\quad + \frac{1}{9} (2(-1)^n + 2^n) (2^{-n} - (-1)^{-n}) M + \frac{1}{9} (2(-1)^n + 2^n) (2(-1)^{-n} + 2^{-n}) I
 \end{aligned}$$

que l'on développe en se souvenant que $M^2 = M + 2I$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{9} \left(1 - (-2)^n - \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right) (M + 2I) \\
 &\quad + \frac{1}{9} \left(2(-2)^n + 1 - 2 - \left(\frac{-1}{2} \right)^n \right) M \\
 &\quad + \frac{1}{9} \left(2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n - 2 + 1 - (-2)^n \right) M \\
 &\quad + \frac{1}{9} \left(4 + 2 \left(\frac{-1}{2} \right)^n + 2(-2)^n + 1 \right) I \\
 &= I \text{ (bluff)}
 \end{aligned}$$

il faut aimer les calculs ... pour combien de points à l'arrivé ? Simplement donner l'idée est sans doute plus rentable !

Donc la formule est encore vraie pour n négatif

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Problème - HEC 2013

Partie I. Prix d'équilibre

1. (a) $D(p) = O(p) \Leftrightarrow 40 - 8p = 2p + 20 \Leftrightarrow p = 2$, donc il existe un unique prix d'équilibre $p^* = 2$.

- (b) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} D_n = O_n &\Leftrightarrow 40 - 8p_n = 2\hat{p}_n + 20 \Leftrightarrow 40 - 8p_n = 4p_{n-1} - 2p_{n-2} + 20 \\ &\Leftrightarrow 8p_n = 20 - 4p_{n-1} + 2p_{n-2} \Leftrightarrow p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- (c)

```
def p(p0, p1, n):
    a, b = p0, p1
    for k in range(2, n+1):
        a, b = b, -0.5*b + 0.25*a + 2.5
    return (b)
```

- (d) Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_n = p_n - p^* &= -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2} - 2 \\ &= -\frac{1}{2}(p_{n-1} - 2) + \frac{1}{4}(p_{n-2} - 2) - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2} \end{aligned}$$

donc (v_n) est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- (e) Son équation caractéristique est $r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$.

$$\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} > 0, \text{ donc elle admet deux racines}$$

$$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

- (f) D'où il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \Leftrightarrow p_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + 2$$

En identifiant pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2 = p_0 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + 2 = p_1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = p_0 \\ (r_2 - r_1)\beta = p_1 - 2 - r_1 p_0 + \end{cases}$$

$$\text{D'où } p_n = \frac{p_1 - 2 - r_2 p_0 + 2r_2}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{p_1 - 2 - r_1 p_0 + 2r_1}{r_2 - r_1} r_2^n + 2.$$

- (g) Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, on a $\lim r_1^n = \lim r_2^n = 0$ et, par suite, $\lim p_n = 2 = p^*$. Dans ces hypothèses, le prix pratiqué tend vers le prix d'équilibre.

2. (a) On a

$$D_n = O_n \Leftrightarrow a - bp_n = c\hat{p}_n + d \Leftrightarrow p_n = \frac{a - c\hat{p}_n - d}{b}$$

$$\text{et } \hat{p}_n = \frac{a - bp_n - d}{c}.$$

(b) En utilisant la formule donnée pour $\hat{p}_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} p_n = \frac{a - c\hat{p}_n - d}{b} &\Leftrightarrow p_n = \frac{a - cp_{n-1} - c\beta p_{n-1} + c\beta p_{n-1} - d}{b} \\ &\Leftrightarrow p_n = \frac{cp_{n-1}}{b}(\beta - 1) - \frac{c\beta}{b}p_{n-1} + \frac{a - d}{b} \\ &\Leftrightarrow p_n = \frac{ca - bp_{n-1} - d}{c}(\beta - 1) - \frac{c\beta}{b}p_{n-1} + \frac{a - d}{b} \\ &\Leftrightarrow p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b} \end{aligned}$$

(c) • $D(p) = O(p) \Leftrightarrow a - bp = cp + d \Leftrightarrow p = \frac{a - d}{b + c}.$

Le prix d'équilibre est donc $p^* = \frac{a - d}{b + c}.$

La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique.

Cherchons c tel que $c = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)c + \beta\frac{a-d}{b} \Leftrightarrow c = \frac{a-d}{a+c} = p^*.$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n - c = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b} - \left(\left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)c + \beta\frac{a-d}{b}\right) = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)(p_{n-1} - c)$$

donc la suite $(p_n - c)$ est une suite géométrique de premier terme $p_0 - c$ et de raison $\left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right).$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n - c = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - c),$ et donc

$$p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - p^*) + p^*$$

(d) Si $p_0 \neq p^*$, il est clair que la suite $(p_n)_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n\right)_n$

converge. Or, cette suite est géométrique de raison $\left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right).$ Elle converge donc si et seulement

si $1 - \beta\frac{b+c}{b} \in]-1, 1[.$ Or, comme β, b et c sont strictement positifs, on a toujours $1 - \beta\frac{b+c}{b} < 1.$

Enfin, $1 - \beta\frac{b+c}{b} > -1 \Leftrightarrow \beta\frac{b+c}{b} < 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} \Leftrightarrow \frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1.$ cqfd.

Dans ce cas, on a $\lim p_n = p^*.$

(e) Si $c < b$, alors on a $\frac{c}{b} < 1$ et, comme $\beta \in]0, 1],$ on a $\frac{2}{\beta} - 1 \geq 1.$

Donc, si $c < b$, on a $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1,$ ce qui assure que (p_n) converge vers $p^*.$

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. (a) h_p est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$h'_p(x) = p - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < p \Leftrightarrow x < \sqrt{p} \quad (\text{car } x \geq 0)$$

D'où

x	0	$\sqrt{p}$	$+\infty$
$h'_p(x)$	+	0	-
$h_p(x)$	0	$\frac{2p\sqrt{p}}{3}$	$-\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x) = -\infty$ (par croissances comparées).

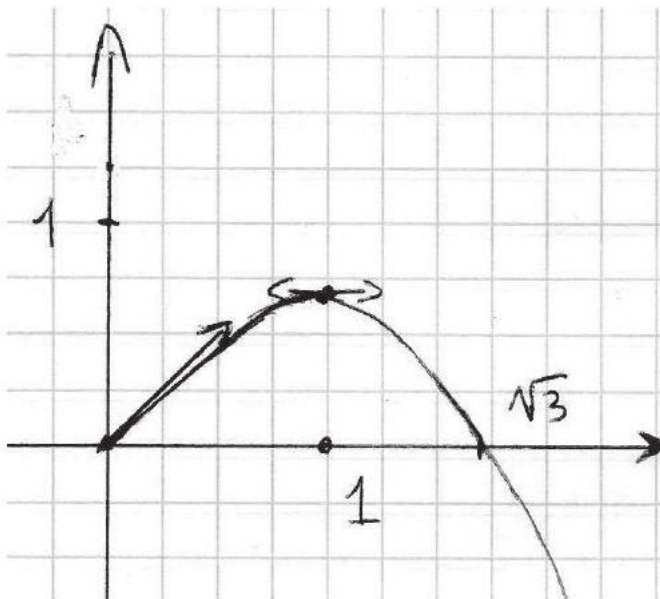
$$h_p(x) = 0 \Leftrightarrow x \left(p - \frac{x^2}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3p} \quad (\text{car } x \geq 0).$$

D'après le tableau de variations de h_p , la valeur maximale de h_p sur $\mathbb{R}_+$ est $\frac{2p\sqrt{p}}{3}$.

- (b) Comme $h'_1(0) = 1$ et $h_1(0) = 0$, on a une demi-tangente en 0 d'équation $y = x$.

Comme $h''_1(x) = -2x \leq 0$, h_1 est concave sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc :



4. (a) Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) \neq +\infty$.

Alors, comme F' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, F' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe M tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F'(x) \leq M$.

Par suite, par positivité de l'intégrale, pour tout $x \geq 0$,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t) dt \leq \int_0^x M dt = Mx, \quad \text{et donc} \quad F(x) \leq Mx + F(0)$$

En divisant pour $x > 0$ par $sx^r > 0$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{F(x)}{sx^r}}_{x \rightarrow +\infty} \leq \underbrace{\frac{Mx + F(0)}{sx^r}}_{(\text{car } F(x) \sim sx^r)}$$

ce qui est donc impossible.

D'où, par l'absurde, on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = +\infty$.

- (b) F' est strictement croissante (énoncé) et continue (car F est C^2) sur $\mathbb{R}_+$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left[F'(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) \right[= \mathbb{R}_+$.

Elle admet donc une bijection réciproque, notée S et $D_S = \mathbb{R}_+$.

- (c) $\bullet \Pi_p$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions de classe C^2 et, pour tout $x \geq 0$,

$$\Pi'_p(x) = p - F'(x) \quad \text{et} \quad \Pi''_p(x) = -F''(x) < 0$$

Par suite, Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$.

- De plus, $\Pi'_p(x) > 0 \Leftrightarrow F'(x) < p \Leftrightarrow x > S(p)$ (car S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme bijection réciproque d'une fonction décroissante).

On a donc :

x	0	$S(p)$	$+\infty$
$\Pi'_p(x)$	+	0	-
$\Pi_p(x)$	$\Pi_p(S(p))$		
	0	$\searrow$	
	0		$-\infty$

Par croissances comparées, on a $\Pi_p(x) = px - \underbrace{F(x)}_{\sim sx^r} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\infty$.

D'après le tableau de variations, Π_p admet donc bien un unique maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en $S(p)$.

5. (a) D'après la question précédente, on a $M(p) = \Pi_p(S(p)) = pS(p) - F(S(p))$.
- (b) Comme $F''(x) > 0$ sur son ensemble de définition, $S = F'^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$S'(x) = \frac{1}{F''(S(x))}$$

Par suite, M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions dérivables et, pour tout $x \geq 0$,

$$M'(x) = S(x) + xS'(x) - S'(x)F'(S(x)) = S(x) + xS'(x) - S'(x)x = S(x)$$

car S est la bijection réciproque de F' et donc $F'(S(x)) = x$.

- (c) Comme $M' = S$, où S est strictement croissante comme bijection réciproque d'une fonction strictement croissante, M est convexe.

De plus, comme $S(x) > 0$ pour tout $x > 0$, M' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ sauf éventuellement en 0, donc M est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

6. (a) Soit $y \in \mathbb{R}_+$.

L'équation de la tangente à C_M au point d'abscisse y est $z = M'(y)(x - y) + M(y)$.

Or M est convexe sur $\mathbb{R}_+$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \geq M'(y)(x - y) + M(y)$.

En appliquant l'inégalité précédente en $p^{(i)} \in \mathbb{R}_+$, on obtient alors

$$M(p^{(i)}) \geq M'(y)(p^{(i)} - y) + M(y) \Leftrightarrow M(p^{(i)}) - M(y) \geq M'(y)(p^{(i)} - y)$$

(b) Comme p est une variable finie, $M(p)$ admet une espérance et, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
 E(M(p)) &= \sum_{i=1}^k M(p^{(i)}) P(p = p^{(i)}) \\
 &\geq \sum_{i=1}^k \left(M'(y) (p^{(i)} - y) + M(y) \right) P(p = p^{(i)}) \quad (\text{d'après 6.a}) \\
 &\geq M'(y) \underbrace{\sum_{i=1}^k p^{(i)} P(p = p^{(i)})}_{=E(p)} - M'(y)y \underbrace{\sum_{i=1}^k P(p = p^{(i)})}_{=1} + M(y) \underbrace{\sum_{i=1}^k P(p = p^{(i)})}_{=1} \\
 &= M'(y)E(p) - yM'(y) + M(y) = M(y) + M'(y)(E(p) - y).
 \end{aligned}$$

(c) En prenant $y = E(p)$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$E(M(p)) \geq M(E(p)) + M'(E(p))(E(p) - E(p)) = M(E(p)). \quad \text{cqfd.}$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ? Est-ce vraiment des maths ???

7. • Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, $\int_{-\infty}^0 xf(x)dx = 0$.

L'existence et la valeur de $E(p)$ dépendent donc uniquement de $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$.

- En supposant que $\int_0^{+\infty} M(x)f(x)dx$ converge, on a, toujours d'après le théorème de transfert,

$$E(M(p)) = \int_0^{+\infty} M(x)f(x)dx \quad (\text{car } f \text{ est nulle sur } \mathbb{R}_-)$$

En utilisant l'inégalité 6.a avec x à la place de $p^{(i)}$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$M(x)f(x) \geq M'(y)(x - y)f(x) + M(y)f(x), \quad \text{et donc} \quad xf(x) \leq \frac{1}{M'(y)}M(x)f(x) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)}f(x)$$

Or, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{M'(y)}M(x)f(x) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)}f(x)dx = \frac{1}{M'(y)} \int_0^{+\infty} M(x)f(x)dx + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)} \int_0^{+\infty} f(x)dx$
converge comme somme d'intégrales convergentes,

donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge aussi (donc p admet une espérance) et

$$E(p) \leq \frac{1}{M'(y)} \int_0^{+\infty} M(x)f(x) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)} \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{M'(y)}E(M(p)) + \frac{yM'(y) + M(y)}{M'(y)}$$

et, par suite,

$$E(M(p)) \geq M(y) + M'(y)(E(p) - y)$$

Enfin, en prenant $y = E(p)$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Partie III. Espérance conditionnelle

8. (a) Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $P_{X=x_i}(Y = y_j) = P(Y = y_j)$. Par suite, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^r y_j P_{X=x_i}(Y = y_j) = \sum_{j=1}^r y_j P(Y = y_j) = E(Y)$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$, il existe i tel que $X(\omega) = x_i$ et, par suite,

$$Z(\omega) = E(Y | X = X(\omega)) = E(Y | X = x_i) = \varphi(x_i) = E(Y)$$

donc Z est la variable constante égale à $E(Y)$, ie $Z = E(Y)$.

- (b) Si $Y = X$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $P_{X=x_i}(X = x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par suite, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^q x_j P_{X=x_i}(X = x_j) = x_i$$

Enfin, pour tout $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) = x_i$, on aura $Z(\omega) = \varphi(x_i) = x_i$, donc on a $Z = X$.

- (c) Si tous les réels $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts, alors

$$\forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad P(E(Y | X) = \varphi(x_i)) = P(X = x_i)$$

- (d) On a $Z = \varphi(X)$ qui admet une espérance car X est finie et, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(E(Y | X)) &= E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^q \varphi(x_i) P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^r y_j P(X = x_i) P_{X=x_i}(Y = y_j) \\ &= \sum_{j=1}^r y_j \sum_{i=1}^q P(X = x_i) P_{X=x_i}(Y = y_j) \\ &= \sum_{j=1}^r y_j P(Y = y_j) \quad (\text{d'après la formule des probabilités totales}) \\ &= E(Y) \end{aligned}$$

- (e) Par linéarité de l'espérance conditionnelle (HP ?!), on a :

$$E(\lambda Y + \rho X + \mu | X) = \lambda E(Y | X) + \rho E(X | X) + \mu E(1 | X) = \lambda E(Y | X) + \rho X + \mu$$

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

9. (a) Comme p_n et p_{n-1} suivent la même loi, on a $E(p_n) = E(p_{n-1})$.

De plus, comme $p_n = \theta p_{n-1} + (1 - \theta)p^* + u_n$ et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(p_n) = \theta E(p_{n-1}) + (1 - \theta)p^* + \underbrace{E(u_n)}_{=0}$$

D'où

$$E(p_n) = \theta E(p_n) + (1 - \theta)p^* + E(u_n) \Leftrightarrow E(p_n) = p^*$$

- De même, on a $V(p_n) = V(p_{n-1})$ et, comme u_n et p_{n-1} sont indépendantes, on a aussi

$$V(p_n) = V(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n) = \theta^2 V(p_{n-1}) + V(u_n) \Leftrightarrow V(p_n) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$$

- Par suite, comme toutes les variables p_n suivent la même loi, on a $E(p_0) = p^*$ et $V(p_0) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$.

Comme de plus on a $p_0 = \ell u_0 + m$, on a aussi $E(p_0) = \ell E(u_0) + m = m$ et $V(p_0) = \ell^2 V(u_0) = \ell^2 \sigma^2$, donc, en identifiant, on obtient :

$$m = p^* \quad \text{et} \quad \ell = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}, \quad \text{et donc} \quad p_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} u_0 + p^*$$

- (b) Comme p_n et p_{n-1} admettent une variance, $\text{Cov}(p_n, p_{n-1})$ existe.

Comme $u_n = p_n - \theta p_{n-1} - (1-\theta)p^*$, on a

$$V(u_n) = V(p_n) + \theta^2 V(p_{n-1}) - 2\theta \text{Cov}(p_n, p_{n-1}), \quad \text{et donc} \quad \text{Cov}(p_n, p_{n-1}) = \frac{(1+\theta^2)V(p_n) - V(u_n)}{2\theta} = \frac{\theta\sigma^2}{1-\theta^2}.$$

- $\theta = \frac{\text{Cov}(p_n, p_{n-1})}{\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}} = \frac{\text{Cov}(p_n, p_{n-1})}{\sqrt{V(p_n)V(p_{n-1})}}$, donc θ est le coefficient de corrélation linéaire de (p_n, p_{n-1}) .

10. On a

$$\begin{aligned} E(p_n | p_{n-1}) &= E(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n | p_{n-1}) \\ &= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + E(u_n | p_{n-1}) \quad (\text{d'après 8.e}) \\ &= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + E(u_n) \quad (\text{d'après 8.a, car } u_n \text{ et } p_{n-1} \text{ sont indépendantes}) \\ &= \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*. \end{aligned}$$

11. (a) On a $E(\hat{p}_n | p_{n-1}) = E(p_{n-1} | p_{n-1}) = p_{n-1}$ (d'après 8.b).

$$\text{On a } E(\hat{p}_n) = E(p_{n-1}) = p^* \text{ et } V(\hat{p}_n) = V(p_{n-1}) = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}.$$

Enfin, on a

$$E(e_n) = E(p_n) - E(\hat{p}_n) = p^* - p^* = 0$$

et

$$V(e_n) = V(p_n) + V(\hat{p}_n) - 2\text{Cov}(p_n, \hat{p}_n) = 2\frac{\sigma^2}{1-\theta^2} - 2\frac{\theta\sigma^2}{1-\theta^2} = \frac{2\sigma^2(1-\theta)}{1-\theta^2} = \frac{2\sigma^2}{1+\theta}$$

- (b) Dans ce modèle, on a donc $\hat{p}_n = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^*$. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} E(\hat{p}_n | p_{n-1}) &= E(\theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* | p_{n-1}) = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* \\ E(\hat{p}_n) &= \theta E(p_{n-1}) + (1-\theta)p^* = p^* \\ V(\hat{p}_n) &= \theta^2 V(p_{n-1}) = \frac{\theta^2 \sigma^2}{1-\theta^2} \\ E(e_n) &= E(p_n) - E(\hat{p}_n) = p^* - p^* = 0 \\ \text{et } V(e_n) &= V(p_n) + V(\hat{p}_n) - 2\text{Cov}(p_n, \hat{p}_n) \\ &= \frac{(1+\theta^2)\sigma^2}{1-\theta^2} - 2\frac{\theta\sigma^2}{1-\theta^2} \\ &= \frac{(1-2\theta+\theta^2)\sigma^2}{1-\theta^2} \\ &= \frac{(1-\theta)^2\sigma^2}{1-\theta^2} = \frac{(1-\theta)\sigma^2}{1+\theta} \end{aligned}$$

- (c) Les anticipations naïve et rationnelle prennent en moyenne la même valeur que le prix p_n , Mais l'écart au prix pratiqué de l'anticipation rationnelle a un écart-type plus petit, et sera donc en moyenne plus proche du prix pratiqué.
Bref, l'anticipation rationnelle est meilleure.