

Option Économique

MATHÉMATIQUES

14 Septembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice n°1

On considère la fonction f définie sur $]0, 1[$ par : $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2} (-x \ln(x) - (1-x) \ln(1-x))$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0, 1[, t \ln(t) < 0$
(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0, 1[$.
3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Exercice n°2

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
- (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
 - (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
- (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$
- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$
- (b) (*) En déduire les valeurs propres de f
- (c) (*) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice n°3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y . On revient au cas général.
2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[1, n]$. Justifier que $P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq i \leq k \end{cases}$

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$.
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .
- `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p .
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a .

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
n=int(input ('entrez la valeur de $n:$'))
p=float(input ('entrez la valeur de $p:$ '))
X=...
Y=...
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[0, n]$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

- (b) Écrire, pour tout i de $[1, n]$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.
6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

- (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

- (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$
7. (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

- (b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

- (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$
- (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x , on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2. Calculer I_0 et I_1

3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

- (b) En déduire I_2 .

- (c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('donnez une valeur pour n: '))
a=1/2
b=np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a= ...
    b= ...
print(b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

- (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n \cdot I_{n-1} - \frac{1}{2}$

6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n

- (b) En déduire la valeur de J_1
7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

n=int(input ( 'donnez une valeur pour n: '))
J=np.log(2)
for k in range(1,n):
    J=...
end
I=...
print(I)

```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$
9. (a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$
- (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
- (c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$
10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$
- (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$
- (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?
11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ . Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$
- (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$
- (b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$

- (c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.
12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.
- (a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$ (b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$ (c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$