

Correction du sujet n°2

Option Économique

MATHÉMATIQUES

14 Septembre 2026

Exercice n°1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{n^4(3 + \frac{-2n^3+n+1}{n^4})}{n^4(\frac{2n^4-n^2+2n+5}{n^4})} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4} = 2$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

$$v_n = \frac{e^{3n}(1 - \frac{\ln(n)^4}{e^{3n}} + \frac{n^2}{e^{3n}})}{e^{2n}(1 - \frac{n^4}{e^{2n}})} = \frac{e^n(1 - \frac{\ln(n)^4}{e^{3n}} + \frac{n^2}{e^{3n}})}{(1 - \frac{n^4}{e^{2n}})}$$

Par croissances comparées, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^4}{e^{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^{3n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{e^{2n}} = 0$$

et d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $-1 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On résout l'équation $(a, b, c) = f(x, y, z)$

$$(a, b, c) = f(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & = & a \\ -x & -y & -z & = & b \\ -2y & -2z & = & c \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} x & +2y & +z & = & a \\ y & & & = & b+a \\ -2y & -2z & = & c \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{cases} x & +2y & +z & = & a \\ y & & & = & b+a \\ -2z & = & c+2(b+a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & a-2y-z \\ y & = & b+a \\ z & = & -a-b-\frac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -b+\frac{1}{2}c \\ y & = & a+b \\ z & = & -a-b-\frac{1}{2}c \end{cases}$$

L'équation $(a, b, c) = f(x, y, z)$ admet ainsi une unique solution. L'application f est donc bijective, d'application réciproque :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-y + 0.5z, x + y, -x - y - 0.5z) \end{array}$$

Exercice n°2

1. On montre que 1 est racine évidente de Q . En effet,

$$Q(1) = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$$

On en déduit qu'il existe un polynôme R de degré 2 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $Q(x) = (x - 1)R(x)$. En effectuant la division euclidienne de Q par $X - 1$, on trouve

$$R(x) = (3x^2 + 5x + 2)$$

Ainsi on a pour tout x réel, $Q(x) = (x - 1)(3x^2 + 5x + 2)$. On cherche maintenant à factoriser R . On cherche ses racines.

$$\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 2 = 1$$

Ainsi R admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 - 1}{6} = -1 \quad x_2 = \frac{-5 + 1}{6} = -\frac{2}{3}$$

La forme factorisée de Q est $\forall x \in \mathbb{R} Q(x) = 3(x - 1)(x + 1)(x + \frac{2}{3})$

- 2.

$$P(-1) = 3 - 14 + 23 - 16 + 4 = 0$$

Donc -1 est bien racine de P .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 12x^3 + 42x^2 + 46x + 16$. Ainsi :

$$P'(1) = -12 + 42 - 46 + 16 = 0$$

Donc -1 est bien racine de P' .

3. (a) On sait que $\deg(P) = 4$ et $\deg((X + 1)^2) = 2$. De plus comme pour tout x $P(x) = (x + 1)^2 S(x)$, on a $\deg(P) = 2 + \deg(S)$.

S est un polynôme de degré 2.

- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on divise $P(x)$ par $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. On obtient

$$P(x) = (x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 8x + 4)$$

Donc $S(x) = 3x^2 + 8x + 4$. On cherche alors ses racines :

$$\Delta = 64 - 48 = 16$$

Donc le S admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-8 + 4}{6} = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{-8 - 4}{6} = -2$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = 3(x + \frac{2}{3})(x + 2)$ et $P(x) = 3(x + 1)^2(x + \frac{2}{3})(x + 2)$.

4. Pour $x \in D_f$

$$f(x) = \frac{3(x+1)^2(x+\frac{2}{3})(x+2)}{3(x-1)(x+1)(x+\frac{2}{3})} = \boxed{\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)}}$$

5. Soient a et b deux réels. Pour tout $x \in D_f$:

$$x + a + \frac{b}{x-1} = \frac{x^2 + (a-1)x - a + b}{x-1}$$

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)} = \frac{x^2 + (a-1)x - a + b}{x-1} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 + (a-1)x - a + b$$

Deux polynômes sont égaux ssi ils ont même degré et mêmes coefficients. Par identification,

$$\begin{cases} a-1=3 \\ b-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=6 \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in D_f, f(x) = x + 4 + \frac{6}{x-1}}$$

Exercice n°3

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(R_n, \overline{R_n})$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles.

$$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1})P(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})P(\overline{R_n}) = p_n + (1-p_n) \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{p_n}{2} + \frac{1}{2}}$$

(b)

```
import numpy as np
n=int(input('Donner un entier naturel'))
p=0.75;
for k in range(2,n+1):
    p=p/2+0.5;

print(p)
```

(c) La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. On résout son équation caractéristique :

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = p_n - 1$.

$$v_{n+1} = p_{n+1} - 1 = \frac{p_n}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{p_n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p_n - 1) = \frac{v_n}{2}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $v_1 = p_1 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \boxed{p_n = 1 - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et ainsi $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.}$

2. On cherche $P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)$. D'après la formule des probabilités composées

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) = \frac{3}{4} \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 = \boxed{\frac{3}{4}}$$

3. On cherche à présent $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_n})$. D'après la formule des probabilités composées

$$P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_n}) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \dots P_{\overline{R_1} \cap \dots \cap \overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

4. On cherche ici $P(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{10})$. D'après les lois de Morgan,

$$P(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_{10}) = 1 - P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_{10}})$$

Les évènements P_i , $i \in [1; 10]$ sont mutuellement indépendants, donc

$$P(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_{10}}) = P(\overline{P_1}) \times P(\overline{P_2}) \times \dots \times P(\overline{P_{10}}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

Donc

$$\boxed{P(P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}}$$

Exercice n°4

1. La suite (u_n) est géométrique de raison e^{-1} et de terme initial 1. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (e^{-1})^n u_0 = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$

Comme $e > 2$, $-1 < \frac{1}{e} < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Évidemment on a $u_n = e^{-n} > 0$. Comme $-n \leq 0$, par croissance de l'exponentielle on conclut $e^{-n} \leq 1$. Finalement $0 < u_n \leq 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{e}\right)} = \left(\frac{e}{e-1}\right) \left(1 - e^{-(n+1)}\right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-(n+1)}\right) = 1$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{e}{e-1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = \frac{1}{e^n + e^{-n}} = \frac{e^{-n}}{e^{-n}} \times \frac{1}{e^n + e^{-n}} = \frac{e^{-n}}{1 + e^{-2n}} = \boxed{\frac{u_n}{1 + u_n^2}}$$

5. D'après la question 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \geq u_n^2 \geq 0$.

$$1 \geq u_n^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 1 + u_n^2 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + u_n^2} \leq 1$$

Comme $u_n \geq 0$, on obtient finalement

$$\frac{u_n}{2} \leq \frac{u_n}{1 + u_n^2} \leq u_n \Leftrightarrow \boxed{\frac{u_n}{2} \leq v_n \leq u_n}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k - \sum_{k=0}^n v_k = v_{n+1} > 0$$

Donc (T_n) est strictement croissante.

De plus $T_n \leq S_n = \left(\frac{e}{e-1}\right) \left(1 - e^{-(n+1)}\right)$. Or $\left(1 - e^{-(n+1)}\right) < 1$ donc $T_n \leq \frac{e}{e-1}$ et (T_n) majorée.

Comme (T_n) est croissante et majorée, le théorème de la limite monotone assure que (T_n) converge.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, en sommant terme à terme les membres de l'inéquation de la question 5, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2} \leq \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{k=0}^n u_k \Leftrightarrow \boxed{\frac{S_n}{2} \leq T_n \leq S_n}$$

Exercice n°5

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ qui est un domaine symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 2} = \frac{x^2}{x^2 - 2} = f(x)$$

La fonction f est paire. On en déduit que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2) - x^2 \times 2x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 2)^2}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
f			0		

3. Il suffit de taper

```
def f(x):
    y=x**2/(x**2-2);
    return(y)
x=np.linspace(3,10,1000)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

4. Pour $x > \sqrt{2}$, il est clair que $x^2 > x^2 - 2 > 0$, donc

$$\frac{x^2}{x^2 - 2} > 1$$

c'est à dire $f(x) < 1$.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$P(x) = -x^3 + x^2 + 2x = x(-x^2 + x + 2)$$

On cherche à présent les racines du trinôme :

$$\Delta = 9 > 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

Ainsi $P(x) = -x(x+1)(x-2)$.

- (b) On dresse le tableau de signes de P

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$-x$	+	+	0	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	-

Ainsi la fonction P est négative sur $[-1; 0]$ et sur $[2; +\infty[$ et positive sur $] -\infty; -1]$ et sur $[0; 2]$.

(c) Soit $x \geq 2$.

$$f(x) \leq x \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 - 2} \leq x \Leftrightarrow x^2 \leq x^3 - 2x \Leftrightarrow -x^3 + x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow P(x) \leq 0$$

D'après la question précédente, cette dernière inégalité est vraie pour $x \geq 2$, donc pour tout $x \geq 2$, $f(x) \leq x$.

(d) Soit $y \in]1, +\infty[$. On résout $y = g(x)$:

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{x^2 - 2} \Leftrightarrow (x^2 - 2)y = x^2 \Leftrightarrow x^2(y - 1) = 2y \Leftrightarrow x^2 = \frac{2y}{y - 1}$$

Comme $y > 1$ cette quantité est bien positive et on a même $2y > 2(y - 1)$ donc $\frac{2y}{y - 1} > 2$. On obtient alors

$$x = \pm \sqrt{\frac{2y}{y - 1}}$$

D'après ce que l'on vient de voir, $\sqrt{\frac{2y}{y - 1}} > \sqrt{2}$, donc l'équation $y = g(x)$ n'admet qu'une seule solution $x \in]\sqrt{2}; +\infty[$, qui est $x = \sqrt{\frac{2y}{y - 1}}$.

Donc g est bijective et $g^{-1} :$	$]1; +\infty[\rightarrow]\sqrt{2}; +\infty[$
x	$\mapsto \sqrt{\frac{2x}{x - 1}}$

Problème

1. Un simple calcul permet de vérifier que $PP^{-1} = I_3$.

Conclusion : P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.
--

2. Par simple calcul, on a :

$$T = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

puis

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et enfin $T^3 = 0_3$. Si $n \geq 3$, alors $T^n = T^3 T^{n-3} = 0_3 T^{n-3} = 0_3$.

Conclusion : pour tout $n \geq 3$, $T^n = 0_3$.

3. On sait que $T = PAP^{-1}$, ce qui implique en multipliant par P^{-1} à gauche et P à droite :

$$P^{-1}TP = P^{-1}PAP^{-1}P = A$$

Ainsi $A = P^{-1}TP$ et $A^3 = (P^{-1}TP)^3 = P^{-1}TP P^{-1}TP P^{-1}TP = P^{-1}T^3P = 0_3$ car $T^3 = 0_3$.

Maintenant si $n \geq 3$, on a $A^n = A^3 A^{n-3} = 0_3 A^{n-3} = 0_3$.

Conclusion : pour tout $n \geq 3$, $A^n = 0_3$.

4. (a) On a $E(0) = I_3 + 0 \times A + \frac{0^2}{2}A^2 = I_3$.

Conclusion : $E(0) = I_3$.

- (b) Soit $(t, t') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} E(t)E(t') &= \left(I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) \left(I_3 + t'A + \frac{(t')^2}{2}A^2 \right) \\ &= I_3 + t'A + \frac{(t')^2}{2}A^2 + tA + tt'A^2 + \frac{t^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

car $A^3 = A^4 = 0_3$. On a ainsi :

$$E(t)E(t') = I_3 + (t + t')A + \frac{(t')^2 + 2tt' + t^2}{2}A^2 = E(t + t')$$

car $(t')^2 + 2tt' + t^2 = (t + t')^2$.

Conclusion : pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(t') = E(t + t')$.

- (c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $E(t)E(-t) = E(t - t) = E(0) = I_3$. Ainsi $E(t)$ est inversible et

$$E(t)^{-1} = E(-t) = I_3 - tA + \frac{(-t)^2}{2}A^2 = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)^{-1} = I_3 - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

- (d) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $E(t)E(t) = E(t + t) = E(2t)$, $E(t)E(t)E(t) = E(2t)E(t) = E(3t)$. Ainsi, on conjecture que pour tout $n \geq 0$, $E(t)^n = E(nt)$. Cela se démontre facilement par récurrence.

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $E(t)^n = E(nt) = I_3 + ntA + \frac{(nt)^2}{2}A^2$.

Partie 2.

1. (a) La matrice Q est carrée d'ordre 2. On a $1 \times (-2) - (-1) \times 1 = -1 \neq 0$ ce qui implique que Q est inversible et que :

$$Q^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : Q est inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

- (b) Par simple calcul, on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D est une matrice diagonale donc pour tout $n \geq 0$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

- (c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = QD^nQ^{-1}$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $B^n = QD^nQ^{-1}$ » pour tout $n \geq 0$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a :

- D'une part $B^0 = I_3$.
- D'autre part $QD^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$.

On a bien $B^0 = QD^0Q^{-1}$ et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, c'est-à-dire :

$$B^n = QD^nQ^{-1}$$

On veut montrer que la propriété est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$$B^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

On a :

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n \times B \\ &= QD^nQ^{-1} \times B \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= QD^nQ^{-1}QDQ^{-1} \quad (\text{question précédente}) \\ &= QD^nI_3DQ^{-1} \\ &= QD^nDQ^{-1} \\ &= QD^{n+1}Q^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, B^n = QD^nQ^{-1}}$.

(d) Simple calcul en utilisant les questions précédentes.

(e)

```
import numpy.linalg as al
B=np.array([[0,-1],[2,3]])
n=int(input("Donner un entier n : "))
print(al.matrix_power(B,n))
```

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 2 - 2^k & 1 - 2^k \\ 2^{k+1} - 2 & 2^{k+1} - 1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} \frac{t^k(2 - 2^k)}{t^k(2^{k+1} - 2)} & \frac{t^k(1 - 2^k)}{t^k(2^{k+1} - 1)} \\ \frac{k!}{t^k(2^{k+1} - 2)} & \frac{k!}{t^k(2^{k+1} - 1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{t^k(2 - 2^k)}{k!} & \sum_{k=0}^n \frac{t^k(1 - 2^k)}{k!} \\ \sum_{k=0}^n \frac{t^k(2^{k+1} - 2)}{k!} & \sum_{k=0}^n \frac{t^k(2^{k+1} - 1)}{k!} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k(2 - 2^k)}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}.$$

(b) Les expressions de b_n, c_n et d_n sont données dans la dernière matrice obtenue précédemment.

Partie 3

1. Il suffit de prendre

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

car alors pour tout t réel

$$e^t E_1 + e^{2t} E_2 = e^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{pmatrix} = E(t)$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$.

2. De simples calculs donnent $E_1^2 = E_1$, $E_2^2 = E_2$, $E_1 E_2 = 0$, $E_2 E_1 = 0$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. On vérifie une nouvelle fois que

$$E(t)E(-t) = (e^t E_1 + e^{2t} E_2)(e^{-t} E_1 + e^{-2t} E_2) = E_1^2 + e^{-t} E_1 E_2 + e^t E_2 E_1 + E_2^2 = E_1 + E_2 = I_2$$

Donc $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}$.