

Etudes de fonctions

. Exercice n°1 - EML 2011

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
2. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
3. Établir :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$$

4. En déduire :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

5. En déduire le sens de variation de f .
 6. Dresser le tableau de variation de f , comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
 7. Tracer l'allure de C . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.
- Il n'est demandé ni l'étude de la convexité, ni la recherche d'éventuels points d'inflexion.

. Exercice n°2 - HEC 2014

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que : $N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$.
 - (a) Montrer que la fonction N est dérivable sur $[0, 1]$.
 - (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
 - (c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N . Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $N'(x) \leq 0$.
 - (d) En déduire pour tout $x \in [0, 1]$, un encadrement de $N(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$
 - (a) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f .
Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0, 1[$.

. Exercice n°3 - ESSEC II 2026

Soit $\theta \in]0, 1]$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{t^2}{8} + \theta t - \ln(1 - \theta + \theta e^t)$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f''(t) = \frac{(1 - \theta - \theta e^t)^2}{4(1 - \theta + \theta e^t)^2}$$

2. En déduire que pour tout réel t , $f(t) \geq 0$, puis que

$$(1 - \theta)e^{-\theta t} + \theta e^{(1-\theta)t} \leq \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)$$