

Sujet de la semaine n°5

Option Économique

MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

Correction de l'exercice n°1 - Oral HEC 2024 n°1 Avec préparation

1. Cours.

$$2. \mathcal{E} = \text{Vect} \left(I_4, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(I_4, J), \text{ où } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Programme Python :

```
import numpy as np
def Appartenance(M):
    N = (M[0,0]-M[0,1])*np.eye(4) + M[0,1]*np.ones((4,4))
    compteur = 0
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            if M[i,j] == N[i,j]:
                compteur = compteur + 1
    if compteur == 16 :
        print('La matrice est dans E')
    else:
        print('La matrice n\'est pas dans E')
```

4. Soient $M \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe deux réels a et b tels que $M = (a-b)I_4 + bJ$. Comme I_4 et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :

$$M^k = ((a-b)I_4 + bJ) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (a-b)^{k-\ell} b^\ell J^\ell$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que $J^n = 4^{n-1}J$. Ainsi :

$$M^k = (a-b)^k I_4 + \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (a-b)^{k-\ell} b^\ell 4^{\ell-1} J = (a-b)^k I_4 + \frac{1}{4} \left((a+3b)^k - (a-b)^k \right) J$$

5. M est symétrique (à coefficients réels) donc diagonalisable.

On remarque que $M - (a-b)I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est une matrice de rang 1 .

Puis, en notant C_k la k -ième colonne de $M - (a-b)I_4$ pour $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on remarque que $C_1 - C_2 = 0, C_1 - C_3 =$

$0, C_1 - C_4 = 0$, ce qui justifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de M associés à la valeur propre $a - b$.

Puis, $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = (a + 3b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le vecteur $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $a + 3b$.

La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est formée de $4 = \dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs et est libre, puisque la résolution de $\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta X_4 = 0$ pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ donne $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

On a donc trouvé une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M . On peut choisir :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3b \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice n°2 - Oral HEC 2024 n°5 Avec préparation

Solution :

1. Cours.

2. La relation $(\mathcal{R})$ s'écrit $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - 4 + e^x \end{cases}$

Comme f est définie sur $\mathbb{R}$ entier, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie.

La fonction f est strictement croissante car c'est une somme de fonctions croissantes. De plus $u_1 = -3 + e < 0$.

Ainsi : $u_1 < u_0$;

$$u_{n+1} < u_n \implies f(u_{n+1}) < f(u_n), \text{ i.e. } u_{n+2} < u_{n+1}.$$

On montre donc par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Si elle était minorée, elle convergerait vers une limite l (théorème de la limite monotone).

Comme f est continue (évident), cette limite serait un point fixe de $f : l - 4 + e^l = l \iff l = \ln(4)$.

Mais u_n étant < 0 à partir du rang 1 ne peut avoir qu'une limite négative.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. (a) $u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \iff u_{n+1} - u_n = -4 + e^{u_n}$. Donc :

$$u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_{k+1} - u_k) + \dots + (u_1 - u_0) + u_0$$

$$= (-4 + e^{u_{n-1}}) + (-4 + e^{u_{n-2}}) + \dots + (-4 + e^{u_k}) + \dots + (-4 + e^{u_1}) + (-4 + e^{u_0}) + u_0 \quad (*)$$

$$\text{d'où : } u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$$

$$\text{Encadrement de la somme } \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} :$$

$$\cdot \text{ comme } e^{u_k} \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \text{ est minoré par } 0;$$

$$\cdot \text{ comme } u_0 = 1 \text{ et } u_k \leq 0 \text{ pour } k \geq 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} = e^{u_0} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k} \leq e + n - 1.$$

Par conséquent : $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leq e + n - 1$.

Encadrement de u_n :

On déduit alors de (*) : $1 - 4n \leq u_n \leq 1 - 4n + e + n - 1$, soit :

$$1 - 4n \leq u_n \leq e - 3n.$$

(b) Il résulte de la majoration de u_n que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{e-3k} = e^e \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-3})^k = e^e \cdot \frac{1 - e^{-3n}}{1 - e^{-3}} < e^e \cdot \frac{1}{1 - e^{-3}} = \frac{e^e}{1 - e^{-3}}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leq C \quad \text{avec } C = \frac{e^e}{1 - e^{-3}}.$$

4. (a) Donc (*) donne la majoration : pour $n \geq 2$ $u_n \leq 1 - 4n + C$ avec $C = \frac{e^e}{1 - e^{-3}}$.

$$\text{L'encadrement : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 - 4n < u_n \leq 1 - 4n + C \quad \text{implique : } -\frac{1}{4n} + 1 - \frac{C}{4n} \leq \frac{u_n}{-4n} < -\frac{1}{4n} + 1 \quad (E)$$

qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{-4n} = 1$.

Donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $w_n = -4n$ est telle que $\frac{u_n}{w_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

(b) l'encadrement (E) donne : $-\frac{1}{4n}(1+C) < \frac{u_n}{-4n} - 1 \leq -\frac{1}{4n}$, d'où : $\left| \frac{u_n}{-4n} - 1 \right| < \frac{1}{4n}(1+C)$ car $C > 0$ Pour montrer que $n \geq 700$ implique $\left| \frac{u_n}{-4n} - 1 \right| < 10^{-2}$, il suffit de montrer que $\left| \frac{u_n}{-4n} - 1 \right| < \frac{7}{n} = \frac{1+27}{4n}$. Il suffit donc de montrer que $C \leq 27$. Or : $C = e^3 \frac{e^e}{e^3 - 1} < 3^3 \frac{e^e}{e^3 - 1} = 27 \frac{e^e}{e^3 - 1}$. Il suffit donc de montrer que $\frac{e^e}{e^3 - 1} < 1$ soit $1 < e^3 - e^e$. Or : $e^3 - e^e = \int_e^3 e^x dx > (3 - e)e^e > 4(3 - e) > 1$ car $e < 2,72$.

(c) Programme Python.

```
import numpy as np
u=-3+np.exp(1)
n=1
while np.abs(u/(-4*n)-1) >= .01 :
    u=u-4+np.exp (u)
    n+=1
print(n)
```

Remarque : le programme donne $n = 113$.