

## Option Économique

## MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (\*) sont destinées aux cubes.

Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

## Exercice n°1

On considère la fonction  $f$  définie comme suit :

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[, f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $] - \infty, 1[$ .

RÉPONSE:

- Les fonctions  $x \mapsto -x$ ,  $x \mapsto 1-x$  et  $x \mapsto \ln(1-x)$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1[$ .
- Pour tout  $x \in ] - \infty, 0[ \cup ]0, 1[$ ,  $(1-x)\ln(1-x) \neq 0$ .
- Par produit et quotient de dénominateur jamais nul,

$f$  est de classe  $C^\infty$ , et en particulier continue, sur  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1[$ .

De plus  $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$  donc  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x}{-(1-x)x}$ , c'est à dire  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1-x}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ .

Donc  $f$  est continue en 0 et donc sur  $] - \infty, 1[$ .

\*\*\*

2. (a) Donner le développement limité de  $\ln(1-x)$  à l'ordre 2 lorsque  $x$  est au voisinage de 0.

RÉPONSE:

Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

\*\*\*

- (b) En déduire que  $f$  est dérivable en 0, puis vérifier que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

RÉPONSE:

Soit  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{-x - (1-x)(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{-x - (-x + \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2))}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

\*\*\*

3. (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ , puis calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  élément de  $] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[$ .

RÉPONSE:

Nous avons montré à la question 1 que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ , elle y est en particulier continue. Pour tout  $x \in ] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-1)(1-x)\ln(1-x) - (-x) \left[ -\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} \right]}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \\ &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x(-\ln(1-x) - 1)}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \\ &= \frac{\ln(1-x)(-1+x-x) - x}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'(x) = - \left( \frac{\ln(1-x) + x}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \right).$$

\*\*\*

- (b) Déterminer le signe de la quantité  $\ln(1-x) + x$ , lorsque  $x$  appartient à  $] -\infty, 1[$ , puis en déduire les variations de  $f$ .

**RÉPONSE:**

On pose  $g : x \mapsto \ln(1-x) + x$  définie sur  $] -\infty, 1[$ . Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et pour tout  $x \leq 1$

$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x}$$

Cette dérivée s'annule en 0, la fonction est alors croissante sur  $] -\infty, 0[$  et décroissante sur  $[0, 1[$ . Elle atteint un maximum en 0 qui vaut  $g(0) = 0$ . Donc la fonction  $g$  est négative sur  $] -\infty, 1[$  et

$$\forall x \in ] -\infty, 1[, \ln(1-x) + x \leq 0$$

Ainsi, comme  $\forall x \in ] -\infty, 1[, (1-x)^2 \ln(1-x)^2 \geq 0$ , et  $(-\ln(1-x) + x) \geq 0$ ,

**la fonction  $f$  croissante sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $[0, 1[$ , et donc sur  $] -\infty, 1[$  (par continuité).**

\*\*\*

- (c) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.

**RÉPONSE:**

- Limite en  $-\infty$  :

$$f(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-x}{-x \ln(1-x)} \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1-x)}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- Limite en 1 :

Par croissances comparées,  $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0^-$ . En posant  $u = 1-x$ , on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 0^-$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x = -1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

\*\*\*

4. (a) Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un seul réel de  $[0, 1[$ , noté  $u_n$ , tel que  $f(u_n) = n$  et donner la valeur de  $u_1$ .

**RÉPONSE:**

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $] -\infty, 1[$  et donc sur  $[0, 1[$ . Ainsi d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de  $[0, 1[$  sur  $[1; +\infty[$ .

**Ainsi, pour  $n \in \mathbb{N}^* \subset [1, +\infty[$ , il existe un unique  $u_n \in [0, 1[$ , tel que  $f(u_n) = n$ .**

\*\*\*

(b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

RÉPONSE:

Le théorème de la bijection nous assure que la fonction  $f^{-1}$  est strictement croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $[0, 1[$ , avec

$$\lim_{x \rightarrow 1} f^{-1}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 1$$

Comme  $u_n = f^{-1}(n)$ , la suite  $(u_n)$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = 1$$

\* \* \*

---

## Exercice n°2

---

On note  $M_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels,  $I$  la matrice identité de  $M_3(\mathbb{R})$ ,  $0$  la matrice nulle de  $M_3(\mathbb{R})$ .

On considère, pour toute matrice  $A$  de  $M_3(\mathbb{R})$ , les ensembles  $E_1(A)$  et  $E_2(A)$  suivants :

$$E_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) ; AM = M\};$$

$$E_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) ; A^2M = AM\}.$$

### Partie I

1. Montrer que  $E_1(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

RÉPONSE:

*on vérifie les critères :*

- $E_1(A) \subset M_3(\mathbb{R})$
- Comme  $A0 = 0$  alors  $0 \in E_1(A)$
- Si  $M$  et  $N$  sont deux matrices de  $E_1(A)$  et  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels alors  $\alpha M + \beta N \in M_3(\mathbb{R})$  et  $A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha M + \beta N$  car  $M$  et  $N$  sont dans  $E_1(A)$   
Donc  $\alpha M + \beta N \in E_1(A)$

*Donc  $E_1(A)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .*

\*\*\*

On admettra que  $E_2(A)$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

2. (a) Établir :  $E_1(A) \subset E_2(A)$ .

RÉPONSE:

*Pour montrer l'inclusion on montre que si  $M \in E_1(A)$  alors  $M \in E_2(A)$  :  
Si  $M \in E_1(A)$  alors  $AM = M$  donc  $A^2M = A(AM) = AM$  et donc  $M \in E_2(A)$   
(on avait aussi  $M \in M_3(\mathbb{R})$ )*

*Donc  $E_1(A) \subset E_2(A)$ .*

\*\*\*

(b) Montrer que, si  $A$  est inversible, alors  $E_1(A) = E_2(A)$ .

RÉPONSE:

*Si  $A$  est inversible, pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque et donc que :*

*Si  $M \in E_2(A)$  alors  $A^2M = AM$  et  $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$  d'où  $AM = M$   
Alors  $M \in E_1(A)$*

*Donc  $E_2(A) \subset E_1(A)$  et finalement  $E_1(A) = E_2(A)$*

\*\*\*

3. (a) Établir que, si  $A - I$  est inversible, alors  $E_1(A) = \{0\}$ .

RÉPONSE:

Comme on a déjà  $0 \in E_1(A)$ , si  $A - I$  est inversible il reste à montrer que si  $M \in E_1(A)$  alors  $AM = M$  d'où  $AM - M = 0$  et  $(A - I)M = 0$  et comme  $A - I$  est inversible **alors**  $M = 0$

**Donc  $E_1(A) = \{0\}$  si  $A - I$  est inversible.**

\*\*\*

(b) Un exemple : Soit

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $E_1(B)$  et  $E_2(B)$ .

RÉPONSE:

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $B$  est diagonale à coefficients diagonaux non nuls,  $B$  est inversible donc  $E_1(B) = E_2(B)$

Comme  $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est également inversible alors

$$\mathbf{E_1(B) = \{0\} = E_2(B)}$$

\*\*\*

## Partie II

On considère la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  définie par  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0)$  et  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

4. (a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

RÉPONSE:

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ . On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{a = b = c = 0\}$$

Donc la famille  $\mathcal{B}$  est libre et de cardinal 3 dans un espace de dimension 3.

**Ainsi  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .**

\*\*\*

(b) Donner la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$ , que l'on notera  $P$ .

RÉPONSE:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\* \* \*

(c) Calculer  $P^{-1}$ .

RÉPONSE:

Un simple calcul d'inverse donne

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

\* \* \*

5. Soit  $Q = X^3 - 3X^2 + 2X$ . Déterminer trois racines  $\lambda_1, \lambda_2$ , et  $\lambda_3$  de  $Q$  telles que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .

RÉPONSE:

On remarque que

- $Q(0) = 0$ . Ainsi  $Q(X) = X(X^2 - 3X + 2)$ .
- Le trinôme admet deux racines : 1 et 2.

**$Q$  admet trois racines  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ , et  $\lambda_3 = 2$ .**

\* \* \*

6. Pour tout  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , montrer que  $E_{\lambda_i} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid CX = \lambda_i X\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et donner une base et la dimension de chacun d'entre eux.

RÉPONSE:

- Pour  $\lambda_1 = 0$ .

$$X \in E_0 \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & -2y & -z & = & 0 \\ x & & & -z & = & 0 \\ 2x & -2y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = x \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  engendre  $E_0$  à lui tout seul, il constitue une famille libre et génératrice de  $E_0$ .

**Donc  $E_0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , dont une base est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\dim(E_0) = 1$ .**

- Pour  $\lambda_2 = 1$ .

$$X \in E_0 \Leftrightarrow CX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & -2y & -z & = & 0 \\ x & -y & & -z & = & 0 \\ 2x & -2y & -z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  engendre  $E_1$  à lui tout seul, il constitue une famille libre et génératrice de  $E_1$ .

**Donc  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , dont une base est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\dim(E_1) = 1$ .**

- Pour  $\lambda_3 = 1$ .

$$X \in E_2 \Leftrightarrow CX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x & -2y & -z & = & 0 \\ x & -2y & & -z & = & 0 \\ 2x & -2y & -2z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  engendre  $E_2$  à lui tout seul, il constitue une famille libre et génératrice de  $E_2$ .

**Donc  $E_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , dont une base est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\dim(E_2) = 1$ .**

\* \* \*

7. Soit  $D = P^{-1}CP$ . Vérifier que  $D$  est diagonale.

**RÉPONSE:**

Un simple calcul donne

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

\* \* \*

8. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}M$ . Montrer :  $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$ .

**RÉPONSE:**

Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} M \in E_1(C) &\iff CM = M \iff CPN = PN \iff P^{-1}CP = N \\ &\iff DN = N \iff N \in E_1(D). \end{aligned}$$

\* \* \*

9. Montrer que  $N \in E_1(D)$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RÉPONSE:

Soit  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , dont les coefficients sont :  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$  alors

$$\begin{aligned} N \in E_1(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2u = u \\ 2v = v \\ 2w = w \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $N \in E_1(D)$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

\*\*\*

10. En déduire l'expression générale des matrices de  $E_1(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_1(C)$ .

RÉPONSE:

Donc une matrice  $M$  est dans  $E_1(C)$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc une famille génératrice de  $E_1(C)$  et libre (échelonnée) est  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$   
qui est donc une base de  $E_1(C)$  qui a finalement une dimension de 3.

\*\*\*

11. Donner l'expression générale des matrices de  $E_2(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_1(C)$ . Est-ce que  $E_1(C) = E_2(C)$ ?

RÉPONSE:

Comme  $D$  donc  $C$  n'est pas inversible on ne peut pas utiliser les résultats de la question I2.a)

Par contre on peut refaire le même raisonnement que précédemment :

$$M \in E_2(C) \iff C^2 M = CM \iff PD^2 P^{-1} N = PDP^{-1} M \iff D^2 N = DN \iff N \in E_2(D)$$

Comme  $D$  est diagonale, on a son carré sur les coefficients diagonaux et

Et avec les mêmes coefficients que précédemment

$$\begin{aligned}
 N \in E_2(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a=a \\ b=b \\ c=c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 4u=2u \\ 4v=2v \\ 4w=2w \end{cases} \\
 &\iff N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc les matrices de  $E_2(C)$  sont celles qui s'écrivent

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{pmatrix} \text{ et une famille génératrice et libre (échelonnée) de } E_2(C) \text{ est :}$$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

donc une base de  $E_2(C)$

La dimension de  $E_2(C)$  est donc 6.

Donc comme  $E_1(C)$  et  $E_2(C)$ , n'ont pas la même dimension, ils ne peuvent pas être égaux.

\*\*\*

---

## Exercice n°3

---

### Partie 1

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ .

RÉPONSE:

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $t \in [k, k+1]$  on a :  $0 < k \leq t \leq k+1$  donc  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$  et comme les bornes :  $k \leq k+1$

alors Montrer que : ,  $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}.$$

\*\*\*

2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$ .

RÉPONSE:

L'inégalité n'est vraie que pour  $k \geq 1$  et donc  $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$  pour tout  $k \geq 2$ .

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \text{ pour avoir } k > 1 \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) + 1 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1.$$

\*\*\*

### Partie 2

On considère une suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation suivante, valable pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

RÉPONSE:

- Pour  $n = 0$  est-ce que  $u_0$  est défini et strictement positif car  $u_0 = 1$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n$  défini et strictement positif.

Alors  $u_n + \frac{1}{u_n}$  est bien défini car  $u_n \neq 0$  et est strictement positif.

•

*Donc par récurrence, chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.*

\* \* \*

(b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

RÉPONSE:

On a donc pour tout entier  $n$  :  $u_{n+1} > u_n$  car  $1/u_n > 0$ , et

*la suite  $u$  est donc croissante.*

\* \* \*

4. (a) Pour tout entier naturel  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .

RÉPONSE:

On a

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

\* \* \*

- (b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= u_n^2 - 1 \text{ d'une part et d'autre part} \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$$

\* \* \*

- (c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

RÉPONSE:

On a  $1/u_k^2 \geq 0$  donc  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k^2} \geq 0$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$ .

Finalement, comme  $2n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , par minoration  $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

\* \* \*

5. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

**RÉPONSE:**

On veut majorer  $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$  et pour cela, minorer  $\frac{1}{u_k^2}$  :

Pour tout  $n : u_n^2 \geq 2n + 1 > 2n$  donc  $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{2n}$  si  $n > 0$  (si  $n \geq 1$ ) le terme pour  $n = 0$  est donc à garder à part.

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2}v_{n-1} \text{ si } n-1 \geq 1 \text{ i.e. } n \geq 2.$$

D'où

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 1 + 1 + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

Conclusion :  $u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}$  pour tout  $n \geq 2$

\* \* \*

- (b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

**RÉPONSE:**

Et comme  $v_n \leq 1 + \ln(n)$  pour tout entier  $n \geq 2$  on a donc  $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1 + \ln(n-1)}{2} = 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

\* \* \*

- (c) En déduire finalement que  $u_n \sim \sqrt{2n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**RÉPONSE:**

On a alors l'encadrement :

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

et comme la fonction  $\sqrt{\cdot}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  et qu'ils en sont éléments :

$$\begin{aligned} \sqrt{2n+1} &\leq u_n \leq \sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}} \text{ donc} \\ \sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} &\leq u_n \leq \sqrt{2n} \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}} \text{ et} \\ \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} &\leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}} \end{aligned}$$

et par encadrement  $u_n/\sqrt{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  donc

$$u_n \sim \sqrt{2n} \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

\* \* \*

### Partie 3

6. Écrire une fonction Python `Suite_u(n)` prenant en entrée un entier  $n$  et permettant de calculer et d'afficher  $u_n$ .

RÉPONSE:

```
def Suite_u(n):  
    u=1  
    for i in range(1,n+1):  
        u=u+1/u  
    return(u)
```

\*\*\*

7. (a) Compléter le programme suivante afin déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $u_n \geq 100$ .

```
n=0  
u=1  
while ... :  
    ...  
print(n)
```

RÉPONSE:

```
n=0  
u=1  
while Suite_u(n)<100 :  
    n=n+1  
print(n)
```

\*\*\*

- (b) On donne  $\ln(2) < 0,70$  et  $\ln(5) < 1,61$ . En déduire un majorant de  $\ln(5000)$ .

RÉPONSE:

On a  $5000 = 5 \cdot (5 \cdot 2)^3 = 5^4 2^3$  donc  $\ln(5000) = 4\ln(5) + 3\ln(2) < 4 \cdot 1,61 + 3 \cdot 0,70 = 8,54$

**$\ln 5000 < 8,54$**

\*\*\*

- (c) Montrer que l'entier  $n$  trouvé en 7.a) est compris entre 4995 et 5000.

RÉPONSE:

Pour que  $n$  soit le plus petit entier vérifiant  $u_n \geq 100$ , il faut et suffit que  $u_n \geq 100$  et  $u_{n-1} < 100$

Or on a vu que  $2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$

- Pour  $n = 4994$  on a  $\ln(n-1) < \ln(5000)$  donc  $2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2} \leq 9988 + 2.5 + 8.54 < 10000$  donc  $(u_{4994})^2 < 10000$  et  $u_{4994} < 1000$   
Donc la valeur recherchée est strictement supérieure à 4994
- Pour  $n = 5000$  on a  $2n + 1 = 10001 > 10000$  donc  $u_{5000}^2 > 10000$  et  $u_{5000} > 100$   
Donc la valeur recherchée est inférieure ou égale à 5000.

***n est compris entre 4995 et 5000***

\* \* \*

---

## Problème

---

### Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :  $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geq m) > 0$ .  
On suppose également que  $X$  vérifie :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geq m)}(X \geq n + m) = P(X \geq n).$$

On pose  $P(X = 0) = p$  et on suppose que  $p > 0$ .

1. On pose  $q = 1 - p$ . Montrer que  $P(X \geq 1) = q$ . En déduire que  $0 < q < 1$ .

RÉPONSE:

Comme les valeurs de  $X$  sont entières,  $\overline{X \geq 1} = (X = 0)$   
Donc  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p = q > 0$  par hypothèse.  
Et comme  $q = 1 - p$  et que  $p > 0$  alors  $q < 1$ .

$$P(X \geq 1) = q \text{ et } 0 < q < 1.$$

\*\*\*

2. Montrer que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n + m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$ .

RÉPONSE:

On revient à la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_{(X \geq m)}(X \geq n + m) = \frac{P(X \geq n + m)}{P(X \geq m)} = P(X \geq n)$$

$$\text{Donc } \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n + m) = P(X \geq m) P(X \geq n)$$

\*\*\*

3. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $u_n = P(X \geq n)$ .

- (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique.

RÉPONSE:

On a avec le couple  $(n, 1)$  la relation :  $P(X \geq n + 1) = P(X \geq 1) P(X \geq n)$   
Donc  $u_{n+1} = q \cdot u_n$

la suite  $u$  est géométrique de raison  $q$

géométrique.

\*\*\*

- (b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $q$ .

RÉPONSE:

On a alors  $u_n = q^n u_0 = q^n P(X \geq 0) = q^n$

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, P(X \geq n) = q^n$$

\* \* \*

(c) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = u_n - u_{n+1}$ .

RÉPONSE:

Comme  $X$  ne prend que des valeurs entières,  $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n + 1)$   
et comme les deux sont incompatibles  $P(X \geq n) = P(X \geq n + 1) + P(X = n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1).$$

\* \* \*

(d) En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $P(X = n) = q^n p$ .

RÉPONSE:

$$\text{Et on trouve donc } P(X = n) = q^n - q^{n+1} = q^n (1 - q) = q^n p$$

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a } P(X = n) = q^n p$$

\* \* \*

4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable  $X + 1$ .

RÉPONSE:

La loi de  $X + 1$  est donnée par :  
 $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $P(X + 1 = n) = P(X = n - 1) = q^{n-1} p$

$X + 1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$

\* \* \*

(b) En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .

RÉPONSE:

Comme  $E(X + 1) = \frac{1}{p}$  et  $V(X + 1) = \frac{q}{p^2}$   
et que  $X = X + 1 - 1$  alors

$$E(X) = \frac{1}{p} - 1 \text{ et } V(X) = \frac{q}{p^2}$$

\* \* \*

## Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telle que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P(Y \geq n) > 0$ , on définit le taux de panne de  $Y$  à l'instant  $n$ , noté  $\lambda_n$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$ .

5. (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ .

RÉPONSE:

Par définition de la probabilité conditionnelle on a :  $\lambda_n = \frac{P(Y = n \cap Y \geq n)}{P(Y \geq n)}$   
et comme  $[Y = n \cap Y \geq n] = (Y = n)$  on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}.$$

\* \* \*

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}.$

**RÉPONSE:**

*On a alors*

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_n &= 1 - \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)} \\ &= \frac{P(Y \geq n) - P(Y = n)}{P(Y \geq n)} \\ &= \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)} \end{aligned}$$

*car  $(Y \geq n) = (Y = n) \cup (Y \geq n+1)$  puisque  $Y$  ne prend que des valeurs entières.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$$

\* \* \*

(c) Établir alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1.$

**RÉPONSE:**

*Comme  $P(Y \geq n) > 0$  pour tout entier  $n$  alors  $1 - \lambda_n > 0$  et  $\lambda_n < 1$   
Mais on peut avoir  $\lambda_n = 0$  (par exemple pour une loi géométrique,  $\lambda_0 = 0$ )*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1.$$

\* \* \*

(d) Montrer par récurrence, que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k).$

**RÉPONSE:**

*Par récurrence :*

- Pour  $n = 1$  :  $\prod_{k=0}^{1-1} (1 - \lambda_k) = 1 - \lambda_0 = \frac{P(Y \geq 1)}{P(Y \geq 0)} = P(Y \geq 1)$  car  $P(Y \geq 0) = 1$
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$   
alors  $\prod_{k=0}^n (1 - \lambda_k) = (1 - \lambda_n) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)} P(Y \geq n) = P(Y \geq n+1)$
- Donc, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$$

\* \* \*

6. (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$ .

RÉPONSE:

La probabilité du contraire est :  $1 - P(Y \geq n) = P(Y < n)$   
 et comme  $Y$  prend que des valeurs entières :  $1 - P(Y \geq n) = P(Y \leq n-1)$

Et comme  $(Y \leq n-1) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (Y = k)$  (incompatibles) alors

$$1 - P(Y \geq n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k)$$

\*\*\*

- (b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y \geq n) = 0$ .

RÉPONSE:

Comme  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  alors  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1$

et  $P(Y \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) \rightarrow 0$  quand  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y \geq n) = 0.$$

\*\*\*

- (c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty$

RÉPONSE:

On a vu que  $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$

Donc  $\ln(P(Y \geq n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k)$

Et comme  $P(Y \geq n) \rightarrow 0$  alors  $\ln(P(Y \geq n)) \rightarrow -\infty$  donc  $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \lambda_k) \rightarrow -\infty$  et

Conclusion :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty$

\*\*\*

- (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général  $\lambda_n$ .

RÉPONSE:

On pense au théorème de comparaison.

On a  $\ln(1+x) \sim x$  quand  $x \rightarrow 0$

Mais il faudrait pour cela que  $\lambda_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Et on a vu que dans le cas d'une loi géométrique, ce n'était pas le cas ( $\lambda_n$  constant)

deux cas :

- si  $\lambda_n \rightarrow 0$  alors  $-\ln(1-\lambda_k) \sim \lambda_k \geq 0$  et par comparaison de série à termes positifs, la série  $\sum_{k \geq 0} \lambda_k$  diverge également.
- Si  $\lambda_n \not\rightarrow 0$  alors la série  $\sum_{k \geq 0} \lambda_k$  diverge (condition nécessaire de convergence)

**la série des  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge**

\*\*\*

7. (a) Compléter cette fonction Python qui prend en entrée un entier naturel  $n$  et renvoie  $n!$ .

```
def factorielle(n):
    u=1
    for k in range(...):
        u= ...
    return(u)
```

RÉPONSE:

```
def factorielle(n):
    u=1
    for k in range(1,n+1):
        u= k*u
    return(u)
```

\*\*\*

- (b) Compléter cette fonction Python permettant d'une part le calcul de la somme  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  et le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant  $n$  d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a > 0$  (on supposera  $n \geq 1$ ).

```
def edhec06(n,a):
    S=0
    for k in range(...):
        S= ...
    taux=...
    return(S,taux)
```

RÉPONSE:

```
def edhec06(n,a):
    S=0
    for k in range(0,n-1):
        S= (a**k*np.exp(-a))/factorielle(k)
    taux=(a**n*np.exp(-n))/(factorielle(n)*(1-S))
    return(S,taux)
```

\*\*\*

### Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de $X$ .

8. Déterminer le taux de panne de la variable  $X$  dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.

RÉPONSE:

$$\text{On avait } P(X \geq n) = q^n \text{ et } P(X = n) = q^n p$$
$$\text{Donc } \lambda_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = p \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

*le taux de panne est constant égal à  $p$*

\*\*\*

9. On considère une variable aléatoire  $Z$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ . On suppose que le taux de panne de  $Z$  est constant, c'est-à-dire que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$ .

(a) Montrer que  $0 < \lambda < 1$ .

RÉPONSE:

Comme on est dans les hypothèses de la partie 3, on a  $\lambda = \frac{P(Z = n)}{P(Z \geq n)}$

Si  $\lambda = 0$  alors  $P(Z = n) = 0$  pour tout entier  $n$ . (et  $\sum P(Z = n) \neq 1$ ). Donc  $\lambda > 0$

Si  $\lambda = 1$  alors  $P(Z = n) = P(Z \geq n)$  donc  $P(Z \geq n+1) = 0$  ce qui contredit  $P(Z \geq n) > 0$  pour tout entier  $n$ .

**Donc  $0 < \lambda < 1$**

\*\*\*

(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , déterminer  $P(Z \geq n)$  en fonction de  $\lambda$  et  $n$ .

RÉPONSE:

On a vu que, pour  $n \geq 1$  on avait  $P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k) = (1 - \lambda)^{n-1+1}$

et donc  $P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1) = (1 - \lambda)^n - (1 - \lambda)^{n+1} = (1 - \lambda)^n \lambda$  et  $P(Z = 0) = 1 - P(Z \geq 1) = \lambda$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N} : P(Z = n) = (1 - \lambda)^n \lambda$

soit la même loi que  $X$  pour  $p = \lambda$ .

\*\*\*

(c) Conclure que les seules variables aléatoires  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont le taux de panne est constant et telles que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ , sont les variables dont la loi est du type de celle de  $X$ .

RÉPONSE:

Donc, si la loi est celle de  $X$ , le taux de panne est constant, et réciproquement

Conclusion : Les seules variables aléatoires  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont le taux de panne est constant et telles que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ , sont les variables dont la loi est du type de celle de  $X$ .

\*\*\*