

Option Économique
MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

Exercice n°1

1. (a) i. Un calcul matriciel direct donne :

$$M = CL = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^2 = 0_3.$$

- ii. On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \dim \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \dim \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{rg}(M) = 1$.

- iii. On a $M^2 = 0$ donc X^2 est un polynôme annulateur de M . Il s'ensuit que la seule valeur propre possible pour M est 0. En outre, $\text{rg}(M) = 1$ donc $0 \in \text{Sp}(M)$. Ainsi,

$$\text{Sp}(M) = \{0\}.$$

Puisque M admet une unique valeur propre et qu'elle n'est pas diagonale, il vient,

M n'est pas diagonalisable.

- (b) i. On a

$$\text{rg}(P) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Ainsi, $\text{rg}(P) = 3$ et donc P est inversible.

Un calcul direct donne

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ii. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 3, elle est donc inversible et il suit de la discussion précédente que

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose donc $Q = {}^t R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

iii. On a

$$PMQ = PCLQ = PC[1, 0, 0] = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conclusion,

$$PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) On propose les programmes suivants :

```
def addlig(b, i, j, A):
    [n, p] = np.shape(A)
    B = A
    for k in range(1, p+1):
        B[i][k] = A[i][k] + b * A[j][k]
    return(B)
```

et

```
def echlig(i, j, A):
    [n, p] = np.shape(A)
    B = A
    for k in range(1, p+1):
        B[i][k] = A[j][k]
        B[j][k] = A[i][k]
    return(B)
```

(b) La matrice D est une matrice diagonale avec des 1 partout sur la diagonale sauf à l'entrée (i, i) qui vaut a . On sait alors (ou on le vérifie à l'aide de la formule du produit matriciel) que multiplier A par D à gauche (à droite, respectivement) revient à multiplier la i -ème ligne (colonne, respectivement) de A par a .

Ainsi, le programme `multligmat` effectue bien l'opération $L_i \leftarrow aL_i$.

3. (a) i. Si on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de M , on a $\text{rg}(M) = 1$ donc toutes les lignes sont colinéaires et il en existe au moins une non nulle. Autrement dit, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $L_{i_0} \neq 0$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $c_i \in \mathbb{R}$ tel que $L_i = c_i L_{i_0}$.

Posons alors $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = L_{i_0}$. Alors

$$CL = \begin{pmatrix} c_1 L_{i_0} \\ c_2 L_{i_0} \\ \vdots \\ c_n L_{i_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = M.$$

ii. On a

$$MC = CLC = C \left(\sum_{i=1}^n \ell_i c_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \ell_i c_i \right) C$$

et $C \neq 0$ donc $\sum_{i=1}^n \ell_i c_i \in \text{Sp}(M)$.

- iii. $\text{rg}(M) = 1$ donc $0 \in \text{Sp}(M)$ et $\dim E_0(M) = n - \text{rg}(M) = n - 1$.

Posons $\lambda = \sum_{i=1}^n \ell_i c_i$. Si $\lambda \neq 0$, on a $\dim E_\lambda(M) \geq 1$ et donc, puisque la somme des dimensions des espaces propres ne peut excéder n , on a

$$\dim E_0(M) + \dim E_\lambda(M) = n.$$

Ainsi, M est diagonalisable.

(b)

- (c) i. Le sujet semble vouloir nous orienter vers un argument calculatoire alors qu'un argument conceptuel général est à portée de main et semble plus éclairant, nous privilégierons donc cette seconde approche.

Soit B_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{Mat}_{B_0}(f) = M$.

Puisque f est non-nul, il existe $u_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(u_1) \neq 0$. Soit $(u_2, \dots, u_n)$ une base de $\text{Ker}(f)$, alors $B_1 = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (on vérifie facilement qu'elle est libre et elle a le bon nombre de vecteurs).

Posons $v_1 = f(u_1) \neq 0$ et complétons v_1 en une base $B_2 = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Alors

$$\text{Mat}_{B_1, B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1}.$$

Autrement dit, si on pose $P = P_{B_1, B_0}$ et $Q = P_{B_0, B_2}$, on a

$$PMQ = E_{1,1}.$$

ii. On reprend la construction précédente, en posant

$$B'_1 = (u_2, \dots, u_{j-1}, u_1, u_{j+1}, \dots, u_n),$$

$$B'_2 = (v_2, \dots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

$$P_i = P_{B'_1, B_0} \quad \text{et} \quad Q_j = P_{B_0, B'_2}.$$

Alors,

$$P_i M Q_j = E_{i,j}.$$

Problème

1. (a) Si f est une fonction impaire continue sur $[-h, h]$:

$$\int_{-h}^h f(t)dt = 0.$$

On obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h dt &= 2h \\ \int_{-h}^h (x+t)dt &= x \int_{-h}^h dt + \int_{-h}^h tdt = 2xh \\ \int_{-h}^h t(x+t)dt &= x \int_{-h}^h tdt + \int_{-h}^h t^2dt = \frac{2}{3}h^3 \\ \int_{-h}^h (x+t)^2dt &= x^2 \int_{-h}^h dt + 2x \int_{-h}^h tdt + \int_{-h}^h t^2dt = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h t(x+t)^2dt &= x^2 \int_{-h}^h tdt + 2x \int_{-h}^h t^2dt + \int_{-h}^h t^3dt \\ &= 2x \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_{-h}^h \\ &= \frac{4h^3x}{3} \end{aligned}$$

- (c) On fait le changement de variable $u = \frac{t}{h}$. Donc $t = hu$ et $dt = hdu$.

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t)dt = \frac{1}{2h} \int_{-1}^1 f(x+hu)hdu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x+hu)du$$

De même :

$$\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h tf(x+t)dt = \frac{3}{2h^3} \int_{-1}^1 huf(x+hu)hdu = \frac{3}{2h} \int_{-1}^1 uf(x+hu)du$$

2. (a) Si k est pair, $(-1)^k = 1$ donc $h^k(1 - (-1)^k) = 0$. Si k est impair, $(-1)^k = -1$ donc $h^k(1 - (-1)^k) = 2h^k$.

(b)

$$S_0(h) = \frac{1}{2} \left[h^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^1 = \frac{h^n}{2(n+1)} (1 - (-1)^{n+1})$$

$$G_0(h) = \frac{3}{2h} \left[h^n \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_{-1}^1 = \frac{3h^{n-1}}{2(n+2)} (1 - (-1)^{n+2})$$

(c)

$$\int_{-h}^h (x+t)^n dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \int_{-h}^h t^k dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^{k+1} (1 - (-1)^{k+1})}{k+1}$$

Les termes d'indice impair de la somme sont nuls donc :

$$\int_{-h}^h (x+t)^n dt = 2x^n h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{(1 - (-1)^{k+1}) x^{n-k}}{k+1} h^{k+1}$$

En divisant par $2h$:

$$S_x(h) = x^n + h^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{(1 - (-1)^{k+1}) x^{n-k}}{2(k+1)} h^{k-2}$$

De même :

$$\int_{-h}^h t(x+t)^n dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \int_{-h}^h t^{k+1} dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^{k+2}(1 - (-1)^{k+2})}{k+2}$$

Les termes d'indice pair de la somme sont nuls donc :

$$\int_{-h}^h t(x+t)^n dt = \frac{2}{3} n x^{n-1} h^3 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \frac{(1 - (-1)^{k+2}) x^{n-k}}{k+2} h^{k+2}$$

En multipliant par $\frac{3}{2}h^3$:

$$G_x(h) = n x^{n-1} + 3h^2 \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \frac{(1 - (-1)^{k+2}) x^{n-k}}{2(k+2)} h^{k-3}$$

Comme A_x et B_x sont continues en 0, $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 A_x(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 B_x(h) = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_x(h) = x^n ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} G_x(h) = n x^{n-1}$$

3. (a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 ;$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

(b) La fonction f est paire et $t \mapsto tf(t)$ est impaire, donc :

$$S_0(h) = \frac{1}{h} \int_0^h t dt = \frac{1}{2} h ; \quad G_0(h) = 0$$

Donc $s(0) = g(0) = 0$.

4. (a)

$$S_x(h) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

(b) La fonction F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$, donc pour tout $h \in [-\alpha, +\alpha]$:

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + o(h) \quad \text{et} \quad F(x-h) = F(x) - hf(x) + o(h)$$

On remplace dans l'expression de $S_x(h)$:

$$S_x(h) = \frac{2hf(x) + o(h)}{2h}$$

On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} S_x(h) = f(x)$. Donc $s(x) = f(x)$.

5. (a) On considère la fonction v_x définie par $v_x(0) = 0$ et pour tout $t \in [-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$:

$$v_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x) - tf'(x)}{t}$$

Cette fonction est continue sur $[-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$ car f est continue sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ et comme f est dérivable en x :

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + o(t)$$

Donc $v_x(t) = \frac{o(t)}{t} = o(1)$. Donc v_x est continue en 0 donc sur $[-\alpha, \alpha]$ et :

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$$

(b) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} v_x(t) = 0$, il existe $\delta \in [0, \alpha]$ tel que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$,

$$|v_x(t)| \leq \varepsilon$$

Pour tout $h \in [0, \delta]$:

$$\left| \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right| \leq \int_{-h}^h t^2 |v_x(t)| dt \leq \varepsilon \int_{-h}^h t^2 dt = \frac{2h^3}{3} \varepsilon$$

Donc :

$$\frac{3}{2h^3} \left| \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

(c) Avec les notations de la question précédente :

$$\begin{aligned} G_x(h) &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t f(x) + t^2 f'(x) + t^2 v_x(t) dt \\ &= \frac{3}{2h^3} \left(f(x) \int_{-h}^h t dt + f'(x) \int_{-h}^h t^2 dt + \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right) \\ &= f'(x) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \end{aligned}$$

Donc :

$$|G_x(h) - f'(x)| = \frac{3}{2h^3} \left| \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

Donc G_x admet une limite en 0 et cette limite est $f'(x)$. Donc $g(x) = f'(x)$.

6. (a) On calcule :

$$\int_{-h}^h (b + at)^2 dt = \int_{-h}^h b^2 + 2abt + a^2 t^2 dt = 2hb^2 + 2a^2 \frac{h^3}{3}$$

Comme :

$$(f(x+t) - (b+at))^2 = (f(x+t))^2 - 2(b+at)f(x+t) + (b+at)^2$$

On a bien :

$$\varphi(a, b) = \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt - 2 \int_{-h}^h (b+at)f(x+t) dt + 2hb^2 + 2a^2 \frac{h^3}{3}$$

Ce qui donne bien la formule demandée.

(b) La fonction φ s'écrit :

$$\varphi(a, b) = k_1 - 2k_2 a - 2k_3 b + k_4 a^2 + k_5 b^2$$

La fonction φ est une combinaison linéaire de 5 fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a, b) = -2k_2 + 2k_4 a ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b}(a, b) = -2k_3 + 2k_5 a.$$

Donc φ admet un unique point critique (a^*, b^*) avec :

$$a^* = \frac{k_2}{k_4} = G_x(h) ; \quad b^* = \frac{k_3}{k_5} = S_x(h)$$

7. (a)

$$E(X) = \frac{1}{2} ; V(X) = \frac{1}{4} ; E(hX) = \frac{h}{2} ; V(hX) = \frac{h^2}{4}$$

(b) On applique le théorème de transfert :

$$E(f(hX + x)) = f(h + x)P(X = 1) + f(x)P(X = 0) = \frac{f(x + h) + f(x)}{2}$$

De même :

$$E((f(hX + x))^2) = \frac{(f(x + h))^2 + (f(x))^2}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(f(hX + x)) &= \frac{(f(x + h))^2 + (f(x))^2}{2} - \left(\frac{f(x + h) + f(x)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(f(x + h) - f(x))^2}{4} \end{aligned}$$

De plus :

$$E(hX f(hX + x)) = \frac{1}{2} h f(h + x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(hX, f(hX + x)) &= \frac{1}{2} h f(h + x) - \frac{h}{2} \times \frac{f(x + h) + f(x)}{2} \\ &= \frac{h(f(x + h) - f(x))}{4} \end{aligned}$$

(c)

$$r_x(h) = \frac{\frac{h(f(x+h)-f(x))}{4}}{\sqrt{\frac{(f(x+h)-f(x))^2}{4} \times \frac{h^2}{4}}} = \frac{f(x + h) - f(x)}{|f(x + h) - f(x)|} = \pm 1$$

Si $f(x + h) > f(x)$, $r_x(h) = 1$; si $f(x + h) < f(x)$, $r_x(h) = -1$. Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(hX + x) = ahX + b$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc a et b vérifient $f(x + h) = ah + b$ et $f(x) = b$. On en déduit que :

$$f(hX + x) = (f(x + h) - f(x))X + f(x).$$

(d) Si $f(x + h) = f(x)$, $f(hX + x)(\Omega) = \{f(x)\}$ donc $f(hX + x) = f(x)$. La relation précédente est encore valable dans ce cas.

8. (a) La fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction densité de X . La fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x + 1) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est la fonction de répartition de X .

$$E(X) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} t dt = 0 ; \quad V(X) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{3}$$

(b) D'après le théorème de transfert :

$$E(f(hX + x)) = \int_{-1}^1 f(ht + x) \frac{1}{2} dt$$

Donc $E(f(hX + x)) = S_x(h)$ d'après 1c. Toujours d'après le théorème de transfert :

$$E((f(hX + x))^2) = \int_{-1}^1 (f(ht + x))^2 \frac{1}{2} dt$$

On fait le changement $u = ht$. Il vient :

$$E((f(hX + x))^2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(u + x))^2 du$$

Donc :

$$V(f(hX + x)) = E((f(hX + x))^2) - (E(f(hX + x)))^2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(u + x))^2 du - (S_x(h))^2$$

$$E(hX f(hX + x)) = \int_{-1}^1 ht f(ht + x) \frac{1}{2} dt = \frac{h^2}{3} \times \frac{3}{2h} \int_{-1}^1 t f(ht + x) dt$$

Donc d'après 1c : $E(hX f(hX + x)) = \frac{h^2}{3} G_x(h)$. Comme $E(hX) = hE(X) = 0$, on a :

$$\text{Cov}(hX, f(hX + x)) = E(hX f(hX + x)) = \frac{h^2}{3} G_x(h)$$

9. (a) Comme f est dérivable en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) ; \quad f(-x) = f(0) - xf'(0) + o(x)$$

Donc

$$0 = \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \frac{2xf'(0) + o(x)}{x} = 2f'(0) + o(1)$$

Ce qui montre que $f'(0) = 0$. Comme f est paire, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire donc on obtient successivement $G_0(h) = 0$, $\text{Cov}(hX, f(hX)) = 0$ et $r_0(h) = 0$.

(b) $f'(t) = nt^{n-1}$. Si $n = 1$, $f'(0) = 1$ sinon $f'(0) = 0$. On reprend la question 2b :

$$\text{Cov}(hX, f(hX)) = \frac{h^2}{3} G_0(h) = \frac{h^{n+1}}{n+2}$$

Comme $S_0(h) = 0$:

$$V(f(hX)) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t^{2n} dt = \frac{h^{2n}}{2n+1}$$

$$r_0(h) = \frac{\frac{h^{n+1}}{n+2}}{\sqrt{\frac{h^2}{3} \times \frac{h^{2n}}{2n+1}}} = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2} \times \frac{h^{n+1}}{|h^{n+1}|}$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} r_0(h) = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}$$

10. (a) Dans 5d, on a montré que $\lim_{h \rightarrow 0} G_x(h) = f'(x)$ donc d'après 8b :

$$\text{Cov}(hX, f(hX + x)) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{3} f'(x)$$

(b) $f(x) = 0$ donc $f(x + t) = tf'(x) + tv_x(t)$.

$$E(f(hX + x)) = S_x(h) = \frac{1}{2h} \left(f'(x) \int_{-h}^h t dt + \int_{-h}^h tv_x(t) dt \right) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h tv_x(t) dt$$

On remarque que : $(f(x + t))^2 = t^2((f'(x))^2 + w_x(t))$:

$$\begin{aligned} E((f(hX + x))^2) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(x + t))^2 dt \\ &= \frac{1}{2h} \left((f'(x))^2 \int_{-h}^h t^2 dt + \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt \right) \\ &= \frac{h^2}{3} (f'(x))^2 + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt \end{aligned}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme v_x tend vers 0 en 0, il existe $\delta \in [0, \alpha]$, tel que pour tout $t \in [0, \delta]$:

$$|v_x(t)| \leq \varepsilon$$

Soit $h \in [0, \delta]$.

$$\left| \int_{-h}^h t v_x(t) dt \right| \leq \int_{-h}^h t |v_x(t)| dt \leq \varepsilon \int_{-h}^h t dt = \frac{h^2 \varepsilon}{2}$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h t v_x(t) dt = 0$$

De même, comme w_x tend vers 0 en 0, il existe $\delta \in [0, \alpha]$, tel que pour tout $t \in [0, \delta]$:

$$|w_x(t)| \leq \varepsilon$$

Soit $h \in [0, \delta]$.

$$\left| \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt \right| \leq \int_{-h}^h t^2 |w_x(t)| dt \leq \varepsilon \int_{-h}^h t^2 dt = \frac{h^3 \varepsilon}{3}$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt = 0$$

(d) D'après 10c :

$$E(f(hX + x)) = o(h) ; \quad E((f(hX + x))^2) = \frac{h^2}{3} (f'(x))^2 + o(h^2)$$

Donc :

$$V(f(hX + x)) = \frac{h^2}{3} (f'(x))^2 + o(h^2)$$

Ce qui montre que :

$$V(f(hX + x)) \sim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{3} (f'(x))^2$$

(e)

$$r_x(h) \sim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h^2}{3} f'(x)}{\sqrt{\frac{h^2}{3} \times \frac{h^2}{3} (f'(x))^2}}$$

Si $f'(x) > 0$ alors : $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h) = 1$. Si $f'(x) < 0$ alors : $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h) = -1$.

11. Soit $\tilde{f}$ la fonction $t \mapsto f(t) - f(x)$. On a $\tilde{f}(x) = 0$ et $\tilde{f}'(x) = f'(x) \neq 0$.

$$V(\tilde{f}(hX + x)) = V(f(hX + x) - f(x)) = V(f(hX + x))$$

$$\text{Cov}(hX, \tilde{f}(hX + x)) = \text{Cov}(hX, f(hX + x) - f(x)) = \text{Cov}(hX, f(hX + x))$$

Donc $\tilde{r}_x(h)$ le coefficient de corrélation linéaire entre hX et $\tilde{f}(hX + x)$ est $r_x(h)$.

Donc, si $f'(x) > 0$ alors $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h) = 1$; si $f'(x) < 0$ alors $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h) = -1$.

12. (a)

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P'_0(t) &= 0, & P''_0(t) &= 0. \\ P_1(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - 1), & P'_1(t) &= t, & P''_1(t) &= 0 \\ P_2(t) &= \frac{1}{8}(t^2 - 1)^2, & P'_2(t) &= \frac{1}{2}t(t^2 - 1), & P''_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \end{aligned}$$

(b) Le degré de P_n est $2n$, celui de $P_n^{(k)}$ est $2n - k$ si $k \leq 2n$ et si $k > 2n$, $P_n^{(k)}$ est nul donc son degré est $-\infty$.

(c) Il existe un polynôme Q de degré au plus $2n - 1$ tel que pour tout t réel :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} (t^{2n} + Q(t))$$

Donc :

$$P_n^{(n)}(t) = \frac{2n(2n-1) \times \dots (n+1)}{2^n n!} t^n + Q^{(n)}(t)$$

Le coefficient dominant de $P_n^{(n)}$ est :

$$a_n = \frac{2n(2n-1) \times \dots (n+1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Le polynôme $P_n^{(2n)}$ est un polynôme constant :

$$P_n^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!} + Q^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, il existe un polynôme tel que pour tout t réel :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2 - 1)^{n-k} T_k(t)$$

Pour $k = 0$, avec $T_0 : t \mapsto \frac{1}{2^n n!}$, on a : $P_n(t) = (t^2 - 1)^n T_0(t)$.

Soit $k \in \{0, \dots, n-2\}$, supposons que pour tout t réel :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2 - 1)^{n-k} T_k(t)$$

où T_k est un polynôme. On dérive. Pour tout t réel :

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)}(t) &= (t^2 - 1)^{n-k} T_k'(t) + 2(n-k)t(t^2 - 1)^{n-k-1} T_k(t) \\ &= (t^2 - 1)^{n-(k+1)} T_{k+1}(t) \end{aligned}$$

avec $T_{k+1}(t) = (t^2 - 1)T_k'(t) + 2(n-k)t(t^2 - 1)^{n-k-1} T_k(t)$. La fonction T_{k+1} est un polynôme. Ce qui conclut le raisonnement par récurrence.

Comme le degré de $P_n^{(k)}$ est $2n - k$ et le degré de $t \mapsto (t^2 - 1)^{n-k}$ est $2(n - k)$, le degré de T_k est $2n - k - 2(n - k) = k$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$$

(e) On montre par récurrence que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+1) \dots (n+k)} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k} (1-t)^{n-k} dt$$

L'égalité est évidente pour $k = 0$. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et supposons que :

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+1) \dots (n+k)} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k} (1-t)^{n-k} dt$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k} (1-t)^{n-k} dt &= \left[\frac{(1+t)^{n+k+1}}{n+k+1} (1-t)^{n-k} \right]_{-1}^1 \\ &\quad + \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k+1} (1-t)^{n-k-1} dt \\ &= \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k+1} (1-t)^{n-(k+1)} dt \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)\dots(n+k)} \times \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-(k+1)} dt.$$

Ce qui termine le raisonnement par récurrence. En particulier pour $n = k$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt &= \frac{n!}{(n+1)\dots(2n)} \int_{-1}^1 (1+t)^{2n} dt \\ &= \frac{n!}{2^{2n+1}n!} \\ &= \frac{(n+1)\dots(2n+1)}{2^{2n+1}(n!)^2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

13. (a) On intègre par parties :

$$\int_{-1}^1 R(t)P_n^{(n)}(t)dt = \left[R(t)P_n^{(n-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 R'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$$

Comme $P_n^{(n-1)}(-1) = P_n^{(n-1)}(1) = 0$, on en déduit l'égalité demandée.

(b) On montre par récurrence que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\int_{-1}^1 R(t)P_n^{(n)}(t)dt = (-1)^k \int_{-1}^1 R^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}(t)dt$$

Ce qui montre, en particulier, l'égalité demandée.

(c) Si le degré de R est strictement inférieur à n , $R^{(n)}$ est le polynôme nul donc :

$$\int_{-1}^1 R(t)P_n^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{-1}^1 R^{(n)}(t)P_n(t)dt = 0$$

(d) On applique 13b avec $R = P_n^{(n)}$:

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = (-1)^n \int_{-1}^1 P_n^{(2n)}(t)P_n(t)dt$$

D'après 12c :

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n(t)dt$$

D'après 12e :

$$\int_{-1}^1 P_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{n+1} \times n!}{(2n+1)!}$$

On en déduit :

$$\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{2^{n+1} \times n!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

14. (a)

$$\frac{1!}{2^1 h^0 0!} \int_{-1}^1 f(x+ht)P_0(t)dt = S_x(h)$$

Donc $L_0(x) = f(x)$.

$$\frac{3!}{2^2 h^1 1!} \int_{-1}^1 f(x+ht)P_1'(t)dt = G_x(h)$$

Donc $L_1(x) = f'(x)$.

- (b) La formule établie en 13b, reste valable si R est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On applique donc cette formule avec $R : t \mapsto f(x + ht)$.

$$R^{(n)}(t) = h^n f^{(n)}(x + ht)$$

Donc :

$$\int_{-1}^1 f(x + ht) P_n^{(n)}(t) dt = \frac{h^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x + ht) \times (1 - t^2)^n dt$$

(c)

$$\left| \int_{-1}^1 \left(f^{(n)}(x + ht) - f^{(n)}(x) \right) (1 - t^2)^n dt \right| \leq 2^n \int_{-1}^1 \left| f^{(n)}(x + ht) - f^{(n)}(x) \right| dt$$

Par changement de variable $u = ht$:

$$\int_{-1}^1 \left| f^{(n)}(x + ht) - f^{(n)}(x) \right| dt = \frac{1}{h} \int_{-h}^h \left| f^{(n)}(x + u) - f^{(n)}(x) \right| du$$

Il existe une fonction v_x continue sur $[-\alpha, \alpha]$ telle que, pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$:

$$f^{(n)}(x + t) = f^{(n)}(x) + t f^{(n+1)}(x) + t v_x(t)$$

Donc :

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^h \left| f^{(n)}(x + t) - f^{(n)}(x) \right| dt \leq \frac{1}{h} \int_{-h}^h |t| \left| f^{(n+1)}(x) + v_x(t) \right| dt$$

La fonction $t \mapsto |f^{(n+1)}(x) + v_x(t)|$ est continue sur $[-\alpha, \alpha]$ donc bornée. Soit K un majorant de cette fonction.

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^h \left| f^{(n)}(x + t) - f^{(n)}(x) \right| dt \leq \frac{1}{h} K \int_{-h}^h |t| dt = Kh$$

Ce qui montre que :

$$\left| \int_{-1}^1 \left(f^{(n)}(x + ht) - f^{(n)}(x) \right) (1 - t^2)^n dt \right| \leq 2^n Kh$$

D'après le théorème des encadrements :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \left(f^{(n)}(x + ht) - f^{(n)}(x) \right) (1 - t^2)^n dt = 0$$

On en déduit aussi que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x + ht) (1 - t^2)^n dt = f^{(n)}(x) \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} f^{(n)}(x)$$

D'après 14b :

$$\frac{(2n+1)!}{2^{n+1} h^n n!} \int_{-1}^1 f(x + ht) P_n^{(n)}(t) dt = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x + ht) (1 - t^2)^n dt$$

Donc $L_n(x)$ existe et $L_n(x) = f^{(n)}(x)$.

15. (a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de $P_k^{(k)}$ est k . Comme la dimension de $R_n[X]$ est $n+1$, il suffit de montrer que la famille $(P_k^{(k)})_{k \in \{0, \dots, n\}}$ est libre. On raisonne par récurrence sur n .

Initialisation : P_0 est non nul donc il forme une famille libre. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $(P_k^{(k)})_{k \in \{0, \dots, n\}}$ est libre. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k^{(k)} = 0$$

En dérivant $n + 1$ fois cette égalité, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k^{(n+1+k)} = 0$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k^{(n+1+k)} = 0$, donc $a_{n+1} P_{n+1}^{(2n+2)} = 0$. Comme $P_{n+1}^{(2n+2)} \neq 0$, on a $a_{n+1} = 0$.
Donc :

$$\sum_{k=0}^n a_k P_k^{(k)} = 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

(b)

$$\int_{-1}^1 (Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^n \left(a_k^2 \int_{-1}^1 (P_k^{(k)}(t))^2 dt \right) + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left(a_i a_j \int_{-1}^1 P_i^{(i)}(t) \times P_j^{(j)}(t) dt \right)$$

D'après 13c, si $i < j$ (on prend $n = j$ et $R = P_i^{(i)}$) :

$$\int_{-1}^1 P_i^{(i)}(t) \times P_j^{(j)}(t) dt = 0$$

D'après 13d :

$$\int_{-1}^1 (P_k^{(k)}(t))^2 dt = \frac{2}{2k+1}$$

Donc :

$$\int_{-1}^1 (Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2$$

(c) On développe :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt - 2 \int_{-1}^1 f(x + \alpha t) Q_n(t) dt + \int_{-1}^1 (Q_n(t))^2 dt$$

On exprime le deuxième terme en fonction des y_k :

$$\int_{-1}^1 f(x + \alpha t) Q_n(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 f(x + \alpha t) P_k^{(k)}(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k y_k$$

Il vient :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt - 2 \sum_{k=0}^n a_k y_k + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2$$

On remarque que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$-2a_k y_k + \frac{2}{2k+1} a_k^2 = \frac{2}{2k+1} \left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k \right)^2 - \frac{2k+1}{2} y_k^2$$

Donc :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k \right)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} y_k^2$$

(d) $\forall Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\Phi_n(Q_n) \geq \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt - \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} y_k^2$$

Il y a égalité si, et seulement si, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$a_k = \frac{2k+1}{2} y_k = a_k^*$$