

DS n°3

## Option Économique

## MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (\*) sont destinées aux cubes.

Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

## Exercice n°1

On considère la fonction  $f$  définie comme suit :

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[, f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $] -\infty, 1[$ .

RÉPONSE:

- Les fonctions  $x \mapsto -x$ ,  $x \mapsto 1-x$  et  $x \mapsto \ln(1-x)$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, 1[$ .
- Pour tout  $x \in ] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[$ ,  $(1-x)\ln(1-x) \neq 0$ .
- Par produit et quotient de dénominateur jamais nul,

$f$  est de classe  $C^\infty$ , et en particulier continue, sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, 1[$ .

De plus  $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$  donc  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x}{-(1-x)x}$ , c'est à dire  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1-x}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ .

Donc  $f$  est continue en 0 et donc sur  $] -\infty, 1[$ .

\*\*\*

2. (a) Donner le développement limité de  $\ln(1-x)$  à l'ordre 2 lorsque  $x$  est au voisinage de 0.

RÉPONSE:

Au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

\*\*\*

- (b) En déduire que  $f$  est dérivable en 0, puis vérifier que  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

RÉPONSE:

Soit  $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, 1[$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{-x - (1-x)(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{-x - (-x + \frac{x^2}{2} + x^2 + o(x^2))}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\stackrel{0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} \\ &\underset{0}{\sim} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

\*\*\*

3. (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ , puis calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  élément de  $] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[$ .

RÉPONSE:

Nous avons montré à la question 1 que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, 1[$ , elle y est en particulier continue. Pour tout  $x \in ] -\infty, 0[ \cup ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-1)(1-x)\ln(1-x) - (-x) \left[ -\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x} \right]}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \\ &= \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x(-\ln(1-x) - 1)}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \\ &= \frac{\ln(1-x)(-1+x-x) - x}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'(x) = - \left( \frac{\ln(1-x) + x}{(1-x)^2 \ln(1-x)^2} \right).$$

\*\*\*

- (b) Déterminer le signe de la quantité  $\ln(1-x) + x$ , lorsque  $x$  appartient à  $] -\infty, 1[$ , puis en déduire les variations de  $f$ .

**RÉPONSE:**

On pose  $g : x \mapsto \ln(1-x) + x$  définie sur  $] -\infty, 1[$ . Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et pour tout  $x \leq 1$

$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x}$$

Cette dérivée s'annule en 0, la fonction est alors croissante sur  $] -\infty, 0[$  et décroissante sur  $[0, 1[$ . Elle atteint un maximum en 0 qui vaut  $g(0) = 0$ . Donc la fonction  $g$  est négative sur  $] -\infty, 1[$  et

$$\forall x \in ] -\infty, 1[, \ln(1-x) + x \leq 0$$

Ainsi, comme  $\forall x \in ] -\infty, 1[, (1-x)^2 \ln(1-x)^2 \geq 0$ , et  $(-\ln(1-x) + x) \geq 0$ ,

**la fonction  $f$  croissante sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $[0, 1[$ , et donc sur  $] -\infty, 1[$  (par continuité).**

\*\*\*

- (c) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.

**RÉPONSE:**

- Limite en  $-\infty$  :

$$f(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{-x}{-x \ln(1-x)} \underset{-\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1-x)}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- Limite en 1 :

Par croissances comparées,  $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln(u) = 0^-$ . En posant  $u = 1-x$ , on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 0^-$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} -x = -1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

\*\*\*

4. (a) Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un seul réel de  $[0, 1[$ , noté  $u_n$ , tel que  $f(u_n) = n$  et donner la valeur de  $u_1$ .

**RÉPONSE:**

La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $] -\infty, 1[$  et donc sur  $[0, 1[$ . Ainsi d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de  $[0, 1[$  sur  $[1; +\infty[$ .

**Ainsi, pour  $n \in \mathbb{N}^* \subset [1, +\infty[$ , il existe un unique  $u_n \in [0, 1[$ , tel que  $f(u_n) = n$ .**

\*\*\*

- (b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

RÉPONSE:

Le théorème de la bijection nous assure que la fonction  $f^{-1}$  est strictement croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $[0, 1[$ , avec

$$\lim_{x \rightarrow 1} f^{-1}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = 1$$

Comme  $u_n = f^{-1}(n)$ , la suite  $(u_n)$  converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = 1$$

\* \* \*

---

## Exercice n°2

---

On note  $M_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels,  $I$  la matrice identité de  $M_3(\mathbb{R})$ ,  $0$  la matrice nulle de  $M_3(\mathbb{R})$ .

On considère, pour toute matrice  $A$  de  $M_3(\mathbb{R})$ , les ensembles  $E_1(A)$  et  $E_2(A)$  suivants :

$$E_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) ; AM = M\};$$

$$E_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) ; A^2M = AM\}.$$

### Partie I

1. Montrer que  $E_1(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

On admettra que  $E_2(A)$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

2. (a) Établir :  $E_1(A) \subset E_2(A)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

- (b) Montrer que, si  $A$  est inversible, alors  $E_1(A) = E_2(A)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

3. (a) Établir que, si  $A - I$  est inversible, alors  $E_1(A) = \{0\}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

- (b) Un exemple : Soit

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer  $E_1(B)$  et  $E_2(B)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

## Partie II

On considère la matrice  $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  définie par  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0)$  et  $u_3 = (1, 0, 1)$  et  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

4. (a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

- (b) Donner la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$ , que l'on notera  $P$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

- (c) Calculer  $P^{-1}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

5. Soit  $Q = X^3 - 3X^2 + 2X$ . Déterminer trois racines  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , et  $\lambda_3$  de  $Q$  telles que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

6. Pour tout  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , montrer que  $E_{\lambda_i} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda_i X\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et donner une base et la dimension de chacun d'entre eux.

RÉPONSE:

\* \* \*

7. Soit  $D = P^{-1}CP$ . Vérifier que  $D$  est diagonale.

RÉPONSE:

\* \* \*

8. Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$ . On note  $N = P^{-1}M$ . Montrer :  $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

9. Montrer que  $N \in E_1(D)$  si et seulement s'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RÉPONSE:

\* \* \*

10. En déduire l'expression générale des matrices de  $E_1(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_1(C)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

11. Donner l'expression générale des matrices de  $E_2(C)$  et déterminer une base et la dimension de  $E_1(C)$ . Est-ce que  $E_1(C) = E_2(C)$  ?

RÉPONSE:

\* \* \*

---

## Exercice n°3

---

### Partie 1

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

2. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

### Partie 2

On considère une suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation suivante, valable pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

RÉPONSE:

\* \* \*

- (b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

4. (a) Pour tout entier naturel  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

- (b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n^2 \geq 2n + 1$ . En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

5. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) En déduire finalement que  $u_n \sim \sqrt{2n}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

### Partie 3

6. Écrire une fonction Python `Suite_u(n)` prenant en entrée un entier  $n$  et permettant de calculer et d'afficher  $u_n$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

7. (a) Compléter le programme suivante afin déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $u_n \geq 100$ .

```
n=0
u=1
while ... :
    ...
print(n)
```

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) On donne  $\ln(2) < 0,70$  et  $\ln(5) < 1,61$ . En déduire un majorant de  $\ln(5000)$ . .

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) Montrer que l'entier  $n$  trouvé en 7.a) est compris entre 4995 et 5000.

RÉPONSE:

\* \* \*

---

## Problème

---

### Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :  $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geq m) > 0$ .  
On suppose également que  $X$  vérifie :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geq m)}(X \geq n + m) = P(X \geq n).$$

On pose  $P(X = 0) = p$  et on suppose que  $p > 0$ .

1. On pose  $q = 1 - p$ . Montrer que  $P(X \geq 1) = q$ . En déduire que  $0 < q < 1$ .
2. Montrer que :  $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geq n + m) = P(X \geq m)P(X \geq n)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

3. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $u_n = P(X \geq n)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique.

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $q$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = u_n - u_{n+1}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(d) En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $P(X = n) = q^n p$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable  $X + 1$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) En déduire  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

## Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et telle que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $P(Y \geq n) > 0$ , on définit le taux de panne de  $Y$  à l'instant  $n$ , noté  $\lambda_n$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geq n)}(Y = n)$ .

5. (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \frac{P(Y \geq n+1)}{P(Y \geq n)}$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) Établir alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(d) Montrer par récurrence, que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

6. (a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) = 1 - P(Y \geq n)$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y \geq n) = 0$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1 - \lambda_k) = +\infty$

RÉPONSE:

\* \* \*

(d) Conclure quant à la nature de la série de terme général  $\lambda_n$ .

7. (a) Compléter cette fonction Python qui prend en entrée un entier naturel  $n$  et renvoie  $n!$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

```
def factorielle(n):  
    u=1  
    for k in range (...):  
        u= ...  
    return(u)
```

(b) Compléter cette fonction Python permettant d'une part le calcul de la somme  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$  et le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant  $n$  d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a > 0$  (on supposera  $n \geq 1$ ).

```
def edhec06(n,a):
    S=0
    for k in range (...):
        S= ...
    taux=...
    return (S,taux)
```

RÉPONSE:

\* \* \*

### Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de $X$ .

8. Déterminer le taux de panne de la variable  $X$  dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.

RÉPONSE:

\* \* \*

9. On considère une variable aléatoire  $Z$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ . On suppose que le taux de panne de  $Z$  est constant, c'est-à-dire que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$ .

(a) Montrer que  $0 < \lambda < 1$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , déterminer  $P(Z \geq n)$  en fonction de  $\lambda$  et  $n$ .

RÉPONSE:

\* \* \*

(c) Conclure que les seules variables aléatoires  $Z$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont le taux de panne est constant et telles que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}, P(Z \geq n) > 0$ , sont les variables dont la loi est du type de celle de  $X$ .

RÉPONSE:

\* \* \*