

Option Économique
MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice n°1

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, et le produit matriciel $M = CL$.

- (a) i. Calculer M et M^2 .
ii. Déterminer le rang de M .
iii. (*) La matrice M est-elle diagonalisable ?

- (b) i. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer le produit $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- ii. Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie ${}^tQ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- iii. Pour une telle matrice Q , calculer le produit PMQ .

2. La fonction Python suivante permet de multiplier la i -ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```
def multlig(a, i, A):
    [n, p] = np.shape(A)
    B = A
    for j in range(p):
        B[i-1, j] = a * B[i-1, j]
    return (B)
```

- (a) Donner le code Python de deux fonctions `addlig` (d'arguments b, i, j, A) et `echlig` (d'arguments i, j, A) permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + bL_j \quad (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j \quad (i \neq j).$$

- (b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat B que la fonction `multlig`.

```
def multligmat(a, i, A):
    [n, p] = np.shape(A)
    D = np.eye(n, n)
    D[i-1, i-1] = a
    B = D.dot(A)
    return B
```

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i -ème ligne et de sa j -ème colonne, qui vaut 1.

- (a) i. Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et d'une matrice-ligne

non nulle $L = (\ell_1 \ \cdots \ \ell_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.

ii. Calculer la matrice MC .

iii. (*) En déduire une valeur propre de M .

iv. (*) Montrer que si le réel $\sum_{i=1}^n c_i \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

- (b) i. (*) À l'aide de l'égalité $M = CL$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = E_{1,1}$.

ii. (*) En déduire que pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.

Problème

Dans tout le problème :

- le réel x est fixé, α est un réel strictement positif et f est une fonction définie et continue sur $[x - \alpha, x + \alpha]$ à valeurs réelles ;
- pour tout réel h vérifiant $0 < h \leq \alpha$, on pose :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt \quad \text{et} \quad G_x(h) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t f(x+t) dt;$$

- sous réserve d'existence, on pose : $s(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} S_x(h)$ et $g(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} G_x(h)$.

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à partir de fonctions définies par des intégrales.

La partie III est indépendante de la partie II, et la partie II est largement indépendante de la partie I.

Partie I. Quelques exemples. Premières propriétés

1. (a) Calculer $\int_{-h}^h dt$, $\int_{-h}^h (x+t) dt$, $\int_{-h}^h t(x+t) dt$ et $\int_{-h}^h (x+t)^2 dt$.
- (b) Montrer que $\int_{-h}^h t(x+t)^2 dt = \frac{4h^3}{3x}$.
- (c) Établir les deux formules :

$$S_x(h) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x+ht) dt \quad \text{et} \quad G_x(h) = \frac{3}{2h} \int_{-1}^1 tf(x+ht) dt.$$

2. Dans cette question uniquement, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.
 - (a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k , la valeur de $h^k(1 - (-1)^k)$.
 - (b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.
 - (c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que : $S_x(h) = x^n + h^2 A_x(h)$ et $G_x(h) = nx^{n-1} + h^2 B_x(h)$, où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x). En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.
3. Dans cette question uniquement, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.
 - (a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
 - (b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.

Dans les questions 4 à 6, on revient au cas général.

4. (a) Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f .
- (b) Établir l'existence de $s(x)$ et montrer que $s(x) = f(x)$.
5. On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.
 - (a) Montrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait :

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t).$$

- (b) En déduire l'égalité :

$$G_x(h) = f'(x) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt.$$

- (c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in]0, \delta]$, on a :

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h t^2 v_x(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

- (d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

6. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(a, b) = \int_{-h}^h (f(x+t) - (b+at))^2 dt.$$

- (a) Établir la relation :

$$\varphi(a, b) = \int_{-h}^h (f(x+t))^2 dt - 2a \int_{-h}^h tf(x+t) dt - 2b \int_{-h}^h f(x+t) dt + \frac{2h^3}{3} a^2 + 2hb^2.$$

- (b) (*) Montrer que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (a^*, b^*) que l'on exprimera en fonction de $S_x(h)$ et $G_x(h)$.

Partie II. Probabilités

Les notations sont celles de la partie I. Les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note E , V et Cov respectivement, l'espérance, la variance et la covariance. On suppose la fonction f dérivable en x , de dérivée $f'(x)$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on s'intéresse au coefficient de corrélation linéaire $r_x(h)$ entre les variables aléatoires hX et $f(hX + x)$ dans quelques cas particuliers.

On définit la covariance de deux variables aléatoires de X et Y par

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et le coefficient de corrélation linéaire par

$$r_x(h) = \frac{\text{Cov}(hX, f(hX + x))}{\sqrt{V(hX)V(f(hX + x))}}$$

7. Dans cette question uniquement, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

- (a) Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. En déduire la valeur de $E(hX)$ et $V(hX)$.
- (b) Montrer que $E(f(hX + x)) = \frac{1}{2}(f(x + h) + f(x))$. Calculer $V(f(hX + x))$ et $\text{Cov}(hX, f(hX + x))$.
- (c) On suppose que $f(x + h) \neq f(x)$. Calculer $r_x(h)$. En déduire l'existence d'une relation affine entre $f(hX + x)$ et hX . Expliciter cette relation en fonction de $f(x)$ et $f(x + h)$.
- (d) Vérifier la validité de la relation précédente lorsque $f(x + h) = f(x)$.

Dans les questions 8 à 11, la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.

On admet que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes s'appliquent au cas de deux variables aléatoires à densité.

- 8. (a) (*) Rappeler les expressions d'une densité, de la fonction de répartition, de l'espérance et de la variance de X .
- (b) (*) Établir les égalités suivantes :

$$E(f(hX + x)) = S_x(h), \quad E(f(hX + x)^2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(u + x))^2 du$$

$$V(f(hX + x)) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (f(x + t))^2 dt - (S_x(h))^2 \quad \text{Cov}(hX, f(hX + x)) = \frac{h^2}{3} G_x(h).$$

9. On suppose dans cette question que $x = 0$.

- (a) Si f est une fonction paire, calculer $f'(0)$ et $r_0(h)$.
- (b) Soit n un entier naturel impair et f la fonction définie par $f(t) = t^n$. Calculer $f'(0)$, $r_0(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_0(h)$.

10. On suppose dans cette question que $f'(x) \neq 0$ et $f(x) = 0$.

- (a) Montrer que $\text{Cov}(hX, f(hX + x))$ est équivalent à $\frac{h^2}{3} f'(x)$, lorsque h tend vers 0^+ .
- (b) On pose : $w_x(t) = v_x^2(t) + 2f'(x)v_x(t)$, où la fonction v_x a été définie dans la question 5.a). Établir les deux relations suivantes :

$$E(f(hX + x)) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t v_x(t) dt \quad \text{et} \quad E((f(hX + x))^2) = \frac{h^2}{3} (f'(x))^2 + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt$$

- (c) Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h t v_x(t) dt = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^h t^2 w_x(t) dt = 0$.
- (d) En déduire un équivalent de $V(f(hX + x))$ lorsque h tend vers 0^+ .
- (e) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h)$.

11. On suppose dans cette question que $f'(x) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. Que peut-on dire de $\lim_{h \rightarrow 0^+} r_x(h)$?

Partie III. Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur

On suppose dans cette partie que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on note pour tout entier naturel k , $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f , avec la convention $f^{(0)} = f$. On confond tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme P_n par : pour tout t réel,

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} (t^2 - 1)^n.$$

12. (a) Calculer $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, ainsi que leurs dérivées première et seconde.
(b) Déterminer le degré de P_n et, pour tout entier naturel k , celui de sa dérivée k -ième $P_n^{(k)}$.
(c) Déterminer le terme de plus haut degré de $P_n^{(n)}(t)$ ainsi que la valeur de $P_n^{(2n)}(t)$.
(d) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on peut écrire :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2 - 1)^{n-k} T_k(t),$$

où T_k est un polynôme de degré k . En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(1)$ et de $P_n^{(k)}(-1)$, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- (e) En remarquant que $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t)$, montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!} \int_{-1}^1 (1+t)^{n+k} (1-t)^{n-k} dt$$

En déduire pour tout entier naturel n , la formule :

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

13. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et n un entier de $\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt = - \int_{-1}^1 R'(t) P_n^{(n-1)}(t) dt.$

- (b) En déduire l'égalité :

$$\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 R^{(n)}(t) P_n(t) dt.$$

- (c) On suppose que R est de degré strictement inférieur à n . Calculer $\int_{-1}^1 R(t) P_n^{(n)}(t) dt.$

- (d) En choisissant un polynôme R particulier, calculer $\int_{-1}^1 (P_n^{(n)}(t))^2 dt.$

14. On pose, pour tout entier naturel n et sous réserve d'existence :

$$L_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2n+1)!}{2^{n+1} h^n n!} \int_{-1}^1 f(x+ht) P_n^{(n)}(t) dt$$

- (a) À l'aide des questions 4 et 5, vérifier que $L_0(x) = f(x)$ et $L_1(x) = f'(x)$.

- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\int_{-1}^1 f(x+ht) P_n^{(n)}(t) dt = \frac{h^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x+ht) (1-t^2)^n dt.$$

- (c) En appliquant le résultat de la question 5.a) à la fonction $f^{(n)}$, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 (f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)) (1-t^2)^n dt = 0$$

En déduire l'existence et l'expression de $L_n(x)$.

15. On rappelle que α est le réel défini dans le préambule du problème. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et Q_n un polynôme de degré inférieur ou égal à n . On pose :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t) - Q_n(t))^2 dt.$$

- (a) Montrer que la famille $(P_0, P_1', P_2'', \dots, P_n^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . La fonction polynomiale $Q_n(t)$ s'écrit alors dans cette base :

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(k)}(t).$$

- (b) En utilisant la question 13, établir l'égalité :

$$\int_{-1}^1 (Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} a_k^2.$$

- (c) On pose, pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $y_k = \int_{-1}^1 f(x + \alpha t) P_k^{(k)}(t) dt$. Montrer que

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^1 (f(x + \alpha t))^2 dt + \sum_{k=0}^n \frac{2}{2k+1} \left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k \right)^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} y_k^2.$$

- (d) Pour quel polynôme Q_n^* , la quantité $\Phi_n(Q_n)$ est-elle minimale ? On exprimera pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, le coefficient a_k^* de Q_n^* en fonction de k et de y_k .