Composite

E C G

DS n°3

Option Économique

MATHÉMATIQUES

5 Octobre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.
Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice n°1

On considère la fonction f définie comme suit :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \ f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
2. (a) Donner le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
   (b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.
   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice n°2

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice A de $M_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \ ; \ AM = M\};$$

$$E_2(A) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \ ; \ A^2M = AM\}.$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.
3. (a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$.
   (b) Un exemple : Soit
   $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ définie par $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, que l'on notera P.
   (c) Calculer P^{-1}.
5. Soit $Q = X^3 - 3X^2 + 2X$. Déterminer trois racines λ_1, λ_2, et λ_3 de Q telles que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
6. Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, montrer que $E_{\lambda_i} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda_i X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner une base et la dimension de chacun d'entre eux.
7. Soit $D = P^{-1}CP$. Vérifier que D est diagonale.
8. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Montrer : $M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.
9. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que
   $$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
10. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
11. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$. Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

Exercice n°3

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

3. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. (a) Pour tout entier naturel k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geqslant 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

   (b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

   (c) En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

6. Écrire une fonction Python `Suite_u(n)` prenant en entrée un entier n et permettant de calculer et d'afficher u_n.
7. (a) Compléter le programme suivante afin déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 100$.

```
n=0
u=1
while ... :
          ...
print(n)
```

   (b) On donne $\ln(2) < 0,70$ et $\ln(5) < 1,61$. En déduire un majorant de $\ln(5000)$. .
   (c) Montrer que l'entier n trouvé en 7.a) est compris entre 4995 et 5000.

Problème

Partie 1 : Étude d'une variable discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall m \in \mathbb{N}, P(X \geqslant m) > 0$.
On suppose également que X vérifie :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P_{(X \geqslant m)}(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant n).$$

On pose $P(X=0) = p$ et on suppose que $p > 0$.

1. On pose $q = 1-p$. Montrer que $P(X \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q < 1$.
2. Montrer que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, P(X \geqslant n+m) = P(X \geqslant m)P(X \geqslant n)$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la deuxième question pour montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (b) Pour tout n de N, exprimer u_n en fonction de n et de q.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = u_n - u_{n+1}$.
   (d) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X=n) = q^n p$.
4. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable $X+1$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Partie 2 : Taux de panne d'une variable discrète.

Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P(Y \geqslant n) > 0$, on définit le taux de panne de Y à l'instant n, noté λ_n par : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = P_{(Y \geqslant n)}(Y = n)$.

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \dfrac{P(Y=n)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - \lambda_n = \dfrac{P(Y \geqslant n+1)}{P(Y \geqslant n)}$.
   (c) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_n < 1$.
   (d) Montrer par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\lambda_k)$.
6. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} P(Y=k) = 1 - P(Y \geqslant n)$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} P(Y \geqslant n) = 0$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} -\ln(1-\lambda_k) = +\infty$
   (d) Conclure quant à la nature de la série de terme général λ_n.
7. (a) Compléter cette fonction Python qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie $n!$.

```
def factorielle(n):
        u=1
        for k in range(...):
                u= ...
        return(u)
```

(b) Compléter cette fonction Python permettant d'une part le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ et le calcul et l'affichage du taux de panne à l'instant n d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (on supposera $n \geqslant 1$).

```
def edhec06(n,a):
        S=0
        for k in range(...):
                S= ...
        taux=...
        return(S,taux)
```

Partie 3 : Caractérisation des variables dont la loi est du type de celle de X.

8. Déterminer le taux de panne de la variable X dont la loi a été trouvée à la question 3 d) de la partie 1.
9. On considère une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$. On suppose que le taux de panne de Z est constant, c'est-à-dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = \lambda$.
   (a) Montrer que $0 < \lambda < 1$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, déterminer $P(Z \geqslant n)$ en fonction de λ et n.
   (c) Conclure que les seules variables aléatoires Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont le taux de panne est constant et telles que pour tout n de $\mathbb{N}, P(Z \geqslant n) > 0$, sont les variables dont la loi est du type de celle de X.