EML

E C G

Sujet de la semaine n°7

Option Économique

MATHÉMATIQUES

2 Novembre 2026

Exercice 1 - Ecricome 2023

Correction proposée par F.Gaunard

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2 et plus généralement, pour tout $j \in [\![1, k]\!], j$ boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard dans cette seconde urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Le premier tirage se fait dans une urne qui contient n boules indiscernables au toucher et chaque numéro est alors équiprobable ; on a reconnu la loi uniforme

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$$

   En particulier, les formules du cours donnent directement $E(X) = \dfrac{n+1}{2}, \quad V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

2. Dans le pire des cas, on pioche lors du premier tirage la boule numérotée 1 et il n'y a dans la deuxième urne qu'une boule numérotée 1 . Si on pioche au premier coup la boule numérotée n, il y a ensuite des boules numérotées de 1 à n dans la deuxième urne. Ainsi, la valeur de la deuxième boule piochée est toujours une valeur entre 1 et n et toutes les valeurs sont possibles. On a donc $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

3. (a) On suppose que l'évènement $[X = k]$ est réalisé.
   D'après la description de l'expérience, on a disposé dans la deuxième urne un nombre de boules égal à

$$1 + 2 + \ldots + k = \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

   (b) Si $j \in [\![1, k]\!]$, il y a dans l'urne des boules numérotées j (et il y en a exactement j). Sinon, les boules j ne font pas partie de l'urne (et la probabilité de les piocher alors nulle). On a donc par équiprobabilité et avec la formule ci-dessus pour le total de boules :

$$P_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2j}{k(k+1)}, & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ 0, & \text{si } k < j \end{cases}$$

4. (a) Commençons par mettre au même dénominateur.

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}=\frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}=\frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$$

Ainsi, par principe d'identification des polynômes

$$\left(\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)}\right)\iff\begin{cases}a+b=0\\ a=1\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}b=-1\\ a=1\end{cases}$$

On peut alors écrire, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

(b) Soit $j\in[\![1,n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X=k]:k\in[\![1,n]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned}P(Y=j)&=\sum_{k=1}^{n}P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k)\\&=\sum_{k=j}^{n}P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k)\\&=\sum_{k=j}^{n}\frac{2j}{k(k+1)}\times\frac{1}{n}=\frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\frac{2j}{n}\sum_{k=j}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)},\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat demandé.

5. Y a un univers image fini, elle admet donc une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{j=1}^{n}jP(Y=j)=\sum_{j=1}^{n}j\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}\\&=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}j(n+1-j)=\frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}j^2\right)\\&=\frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\&=(n+1)-\frac{2n+1}{3}\\&=\frac{n+2}{3},\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

6. Soit $n\geq 2$. Si X et Y étaient indépendantes alors, pour tout couple $(k,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on aurait

$$P_{[X=k]}(Y=j)=P(Y=j)\neq 0.$$

Or, la probabilité de gauche est nulle dès que $j > k$. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.
Pour $n = 1$, les deux variables aléatoires X et Y sont certaines et égales à $1 \ldots$ elles sont donc indépendantes.

7. (a) Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k]\cap[Y=j]) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP([X=k])P_{[X=k]}([Y=j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj \times \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{1}{3n}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{18}(2(2n+1)+3) \\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18},
\end{aligned}$$

   (b) (b) Par la formule de König-Huyguens,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{(n+1)(4n+5)}{18} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \\
&= \frac{n+1}{18}(4n+5-3(n+2)) \\
&= \frac{(n+1)(n-1)}{18} = \frac{n^2-1}{18}
\end{aligned}$$

   et c'est tout bon.
   (On remarque que, pour $n = 1$, la covariance est nulle, ce qui est cohérent avec ce qu'on a mentionné ci-avant quant à l'indépendance de X et Y.)

8. (a)
```
def seconde_urne(k):
    L=[]
    for j in range(1,k+1):
        for i in range(j):
            L.append(j)
    return(L)

import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X=rd.randint(1,n+1)
    urne2=seconde_urne(X)
    np=len(urne2)
    i=rd.randint(0,nb)
    Y=urne2[i]
    return(X,Y)
```

(b) La variable liste contient la liste des fréquences de chaque valeur prise par Y lors de 10000 simulations de celle-ci. C'est à dire qu'on estime la loi de Y (les fréquences observées donnent des valeurs approchées des valeurs théoriques $P(Y = j)$).

On commence, avec la commande liste = [0]∗ n par créer une liste de n zéros qui va être actualisé. Le j-ième terme de la liste (indexé en Python par $j-1$) contient la fréquence de passage par la valeur j.
En effet, la commande j = simul_XY[1] simule Y (c'est la deuxième composante du couple (X,Y) car on indexe en commençant par 0 . . .) et les composantes de liste sont les fréquences qui augmente de 1 divisé par l'effectif total dès lors que Y a pris la valeur de la composante en question.

10. (a) Le point moyen a pour coordonnées $(\bar{x},\bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent respectivement les moyennes des 20 valeurs obtenues par les simulations de X et de Y. Lorsque n devient grand, la *loi* faible des grands nombres permet d'affirmer (enfin il faudrait dire que X et Y admettent une variance mais c'est le cas car les univers images sont finis) que la moyenne empirique d'un n-échantillon fournit une bonne $\oint^1$ estimation de l'espérance. Donc le point moyen devrait avoir des coordonnées

$$\bar{x} \simeq E(X) = \frac{21}{2} = 10,5, \quad \text{et } \bar{y} \simeq E(Y) = \frac{22}{3} \simeq 7,33.$$

(b) Les valeurs prises par X et Y sont entre 1 et 20 : on peut éliminer la figure 1 (le nuage de points ne correspond pas). La covariance de X et Y est positive, la droite de régression est donc croissante. On peut éliminer la 4. La droite de régression passe par le point moyen, donc elle doit passer par $(10,5;7,33)$. On peut donc éliminer les figures 2 et 4 où c'est la droite de régression qui ne correpond pas.
C'est donc la figure 3 qui correspond au nuage de points étudié.

Exercice 2 - Ecricome 2012

Correction proposée par P. Veuillez

1. il y a $2n$ feuilles dans la boite.
Les premières pioches sont (ni ordre ni répétition) les combinaisons de deux feuilles parmi $2n$. (équiprobables)
Il y en a $\binom{2n}{2} = \dfrac{2n\,(2n-1)}{2}$
Les pioches formant un couple sont déterminées par la feuille originale (parmi n) il y en a n
Donc $\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right) = \dfrac{n}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{1}{2n-1}$ et $\mathrm{P}\left(A_n\right) = 1 - \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1}$
Conclusion : $\boxed{a_n = \dfrac{2n-2}{2n-1}}$

2. Étude de T_2. On suppose dans cette question que $n=2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.

(a) Pour vider la boite, il faut et suffit d'avoir d'abord un premier couple, les feuilles restantes seront alors agrafées à la pioche suivante.
Donc $(T_2 = k)$ signifie que l'on n'a pas eu de couple jusqu'à $k-1$, et que l'on en a eu un à la $k-1^{ème}$ pioche.
En notant S_i (succès) le fait d'avoir un couple à la $i^{ème}$ pioche et E_i sinon, on a donc :

$$(T_2 = k) = E_1 \cap \cdots S_{k-1} \text{ et}$$
$$\mathrm{P}\left(T_2 = k\right) = \mathrm{P}\left(E_1\right)\mathrm{P}_{E_1}\left(E_2\right)\cdots\mathrm{P}_{E_1\cdots E_{k-2}}\left(S_{k-1}\right)$$

Tant que l'on n'a pas eu de couple, on est avec une boite contenant les 4 feuillets et la probabilité de ne pas piocher un couple est donc a_2.
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \geq 2 : \mathrm{P}\left(T_2 = k\right) = \left(1-a_2\right)\left(a_2\right)^{k-2}}$

(b) $S_2 = T_2 - 1$

Donc $S_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $(S_2 = k) = (T_2 = k+1)$ donc $\mathrm{P}(S_2 = k) = (1-a_2)(a_2)^{k-1}$

Conclusion : $\boxed{S_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-a_2)}$

donc $E(S_2) = \dfrac{1}{1-a_2}$ et $V(S_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}$

et comme $T_2 = S_2 + 1$ alors $V(T_2) = V(S_2)$ et $E(T_2) = E(S_2) + 1$

Conclusion : $\boxed{E(T_2) = \dfrac{2-a_2}{1-a_2} \text{ et } V(T_2) = \dfrac{a_2}{(1-a_2)^2}}$

3. Étude de T_3. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.

(a) Comme il y a 3 paires à reformer , $(T_3 = 2)$ est impossible et $\mathrm{P}(T_3 = 2) = 0$

$(T_3 = 3)$ signifie que l'on a fait des paires à chaque pioche :

Donc $(T_3 = 3) = S_1 \cap S_2$ (on a alors S_3) et

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = 3) &= \mathrm{P}(S_1)\,\mathrm{P}_{S_1}(S_2)\\ &= (1-a_3)(1-a_2)\end{aligned}$$

car quand on a fait le premier couple, il reste 4 feuilles.

(b) $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ est un système complet d'événements, donc pour tout $k \geq 2$ (impossible sinon) que :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = k+1) &= \mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)\,\mathrm{P}\left(\overline{A_3}\right)\\ &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k)\end{aligned}$$

avec $\mathrm{P}_{A_3}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_3 = k)$ car, quand on n'a pas fait de couple au premier on est encore avec les 6 feuillets dans la boite et il ne reste que k pioches à faire pur finir en $k+1$ picoches.

et $\mathrm{P}_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) = \mathrm{P}(T_2 = k)$ car un couple ayant été agrafé, il ne reste que 2 coules dans la boites et k pioches à faire pour la vider.

(c) Courageusement, par récurrence :

Pour $k = 2$:

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^0 - (a_2)^0\right] = \mathrm{P}(T_3 = 2)$$

Soit $k \geq 2$.tel que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_3 = k) &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] \text{ alors}\\ \mathrm{P}(T_3 = k+1) &= a_3\,\mathrm{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\,\mathrm{P}(T_2 = k)\\ &= a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right] + (1-a_3)(1-a_2)(a_2)^{k-2}\\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[a_3(a_3)^{k-2} - a_3(a_2)^{k-2} + (a_2)^{k-2}(a_3 - a_2)\right]\\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-1} - (a_2)^{k-1}\right]\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 2, \quad \mathrm{P}(T_3 = k) = \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right].}$

(d) On doit trouver 1 !

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{M} \mathrm{P}\left(T_3 = k\right) &= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \sum_{k=2}^{M} \left[\left(a_3\right)^{k-2} - \left(a_2\right)^{k-2}\right] \\
&= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \sum_{h=0}^{M} \left[\left(a_3\right)^{h} - \left(a_2\right)^{h}\right] \\
&\to \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\frac{1}{1-a_3} - \frac{1}{1-a_2}\right] \text{ car } |a_3| < 1 \\
&= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\frac{a_2-a_3}{\left(1-a_3\right)1-a_2}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(T_3 = k\right) \text{ et } T_3 \text{ est bien une variable aléatoire}}$

(e) Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M} \left(k-1\right) \mathrm{P}\left(T_3 = k\right) \\
&= \sum_{k=2}^{M} \left(k-1\right) \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\left(a_3\right)^{k-2} - \left(a_2\right)^{k-2}\right] \\
&= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \sum_{h=1}^{M-1} h\left(a_3\right)^{h-1} - h\left(a_2\right)^{h-1} \\
&\to \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\frac{1}{\left(1-a_3\right)^2} - \frac{1}{\left(1-a_2\right)^2}\right] \\
&= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\frac{\left(1-a_2\right)^2 - \left(1-a_3\right)^2}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}\right] \\
&= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\frac{\left(1-a_2-1+a_3\right)\left(1-a_2+1-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}\right] \\
&= \frac{\left(1-a_2\right)\left(1-a_3\right)}{a_3-a_2} \left[\frac{\left(a_3-a_2\right)\left(2-a_2-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)^2\left(1-a_2\right)^2}\right] \\
&= \frac{\left(2-a_2-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)\left(1-a_2\right)} = E\left(T_3-1\right)
\end{aligned}$$

La série est absolument convergente, donc $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E\left(T_3-1\right) = \dfrac{\left(2-a_2-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)\left(1-a_2\right)}$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } T_3 \text{ a une espérance et } E\left(T_3\right) = \dfrac{\left(2-a_2-a_3\right)}{\left(1-a_3\right)\left(1-a_2\right)} + 1}$

(f) De même (presque ...)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{M} k\,(k-1)\,\mathrm{P}\,(T_3=k)\\
&=\sum_{k=2}^{M} k\,(k-1)\,\frac{(1-a_2)\,(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)\,(1-a_3)}{a_3-a_2}\sum_{k=2}^{M} k\,(k-1)\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]\\
&\to\frac{(1-a_2)\,(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{2}{(1-a_3)^3}-\frac{2}{(1-a_2)^3}\right]\\
&=\frac{(1-a_2)\,(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2)^3-(1-a_3)^3}{(1-a_3)^3\,(1-a_2)^3}\right]
\end{aligned}$$

et on doit retravailler d'abord

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

pour simplifier

$$\begin{aligned}
E\left[T_3\,(T_3-1)\right]&=\frac{(1-a_2)\,(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{(1-a_2-1+a_3)\left[(1-a_2)^2+(1-a_2)\,(1-a_3)+(1-a_3)^2\right]}{(1-a_3)^3\,(1-a_2)^3}\right]\\
&=\frac{a_2^2-2a_2+1+1-a_2-a_3+a_2a_3+1-2a_3+a_3^2}{(1-a_3)^2\,(1-a_2)^2}\\
&=\frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{(1-a_3)^2\,(1-a_2)^2}
\end{aligned}$$

car la série est absolument convergente
$T_3\,(T_3-1)=T_3^2-T_3$ donc $T_3^2=T_3\,(T_3-1)+T_3$ a une espérance et

$$\begin{aligned}
E\left(T_3^2\right)&=E\left[T_3\,(T_3-1)\right]+E\,(T_3)\\
&=\frac{a_2^2+a_2a_3-3a_2+a_3^2-3a_3+3}{(1-a_3)^2\,(1-a_2)^2}+\frac{(2-a_2-a_3)}{(1-a_3)\,(1-a_2)}+1
\end{aligned}$$

donc T_3a une variance et

$$V\,(T_3)=E\left(T_3^2\right)-E\,(T_3)^2$$

et là l'énoncé ne demande pas son expression ... donc on s'arrête