Composite

E C G

Sujet de la semaine n°8

Option Économique

MATHÉMATIQUES

9 novembre 2026

Exercice n°1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille(J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)\,I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.

   (b) Vérifier que la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) Justifier que f est diagonalisable.
3. (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   (b) Écrire la matrice D de f dans cette base.

   (c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P\,D\,P^{-1}$
4. (a) Déterminer la matrice P^{-1}.

   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n P^{-1}$

   (c) En déduire explicitement la matrice A^n.

Exercice n°2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\,dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.

(b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

(c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

(c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Compléter les commandes Python suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=int(input('entrez une valeur pour n : '))
A=...
print(.....)
```

4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice n°3

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.
2. (a) Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (I_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) (*) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X], f_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

(a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

(b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

(c) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_p$ les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!], a_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$.