Composite

E C G

Sujet de la semaine n°9

**Option Économique**

MATHÉMATIQUES

**16 novembre 2026**

# Exercice n°1

Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note $X_n$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. Ainsi, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, la variables $X_n$ prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5 = 4$. Pour tout $k$ de $[\![1; n+1]\!]$, on note $N_k$ la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k$-ième tirage.

## Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'évenement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables $N_1, N_2, N_3$. En déduire $\mathrm{P}(X_3 = 4)$.

   (b) Montrer que $\mathrm{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathrm{P}(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de $X_3$.

## Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, $n$ est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout $k$ de $[\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de $N_k$ et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $\mathrm{P}(X_n = n+1)$.
5. Montrer, pour tout $i$ de $[\![1; n]\!]$ : $\mathrm{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $\mathrm{P}(X_n = 2)$.
7. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$.
   En déduire que $\mathrm{P}(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\binom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $\mathrm{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathrm{P}(X_n > k-1)$ et de $\mathrm{P}(X_n > k)$.
9. En déduire : $\mathrm{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n > k)$. Calculer ensuite $\mathrm{E}(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k \in [\![2; n+1]\!], \mathrm{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

### Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 2}$.

11. Soit $k$ un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

12. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

    On admet qu'il existe une variable aléatoire $Z$ à valeurs dans $[\![2;+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![, \mathrm{P}(Z=k) = \frac{k-1}{k!}$$

13. Montrer que $Z$ admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathrm{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(X_n)$.

## Exercice n°2

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité $p$, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1-p$.

### Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs $A$ et $B$ s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, $A$ et $B$ lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on note $X_k$ (resp. $Y_k$) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1$^{\text{er}}$ pile par $A$ (resp. par $B$) lors de la $k$-ième manche.

On note, toujours pour $k$ dans $\mathbb{N}^*$, $E_k$ l'événement : « Il y a égalité à la fin de la $k$-ième manche ».
On note $E$ l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».
On note $G$ (resp. $H$ ) l'événement : « $A$ (resp. $B$ ) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $G_n$ (resp. $H_n$ ) l'événement : « $A$ (resp. $B$ ) gagne le jeu à la $n$-ième manche ».

1. Étude de la première manche.
   (a) Donner la loi commune à $X_1$ et $Y_1$. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.
   (b) Écrire l'événement $E_1$ à l'aide des variables $X_1$ et $Y_1$.
   (c) Montrer que $P(E_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)\,P(Y_1 = i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de $p$ et $q$.
   (d) Justifier sans aucun calcul que les événements $G_1$ et $H_1$ sont équiprobables. En déduire la probabilité de $G_1$ en fonction de $p$ et $q$.
2. Calcul de la probabilité de l'événement $G$.
   (a) Écrire, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, l'événement $G_n$ à l'aide des événements $E_k$ et de l'événement $(X_n < Y_n)$.
   (b) Pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1\cap\ldots E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geq 2,\ \ P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

   (c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

(d) Exprimer $G$ en fonction des $G_n$ puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

(e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement $H$ : « $B$ gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $P(E) = 0$.

## Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, $A$ parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et $B$ parie le contraire.

3. (a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.

   (b) En déduire la probabilité $u$ que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. (a) Utiliser les événements $E_k$ pour écrire l'événement $K_n$ « l'un des deux joueurs gagne à la $n$-ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $P(K_n)$.

5. Donner finalement la probabilité de l'événement $K$ : « $A$ gagne ce pari ».

## Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à Python de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$.

6. Compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p=float(input('Entrer une valeur pour p'))
c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
        X=...
        Y=...
        c=...
if X<Y:
        ...
else:
        ...
print(c)
```

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur ?

```
if ...:
        print('A gagne le deuxième jeu')
else:
        ...
```