Composite

E C G

DS n°4

Option Économique

MATHÉMATIQUES

16 Novembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.
Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice n°1

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie I

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. On considère l'application f qui, à tout P de E, associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' sont les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{C}$.
3. (a) Montrer que f est un automorphisme de E. En déduire $\text{Ker}(f)$.
   (b) Écrire la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$.
4. Montrer que l'ensemble $E_6 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, AX = 6X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
5. (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie II

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endormorphisme identité de F. On considère g l'application qui, à toute fonction de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

6. Montrer que g est un endomorphisme de F
7. Dans cette question, on se propose de déterminer de $\text{Ker}(6 - Id)$. On considère donc une fonction u élément de $\text{Ker}(g - 6Id)$.
   (a) Montrer que la fonction j, définie pour tout réel x par $j(x) = u'(x)e^{-5x}$ est constante.

(b) En déduire que $\text{Ker}(g - 6Id) = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.

On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer $\text{Ker}\,(g)$. On considère donc u une fonction de $\text{Ker}\,(g)$.

8. On pose $v = u' - 2u$. Montrer que $v' = 3v$ et en déduire une expression générale de v
9. On pose $w = u' - 3u$. Montrer que $w' = 2w$ et en déduire une expression générale de w.
10. (a) Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que $\text{Ker}\,(g) = \text{Vect}\,(u_3, u_4)$, où les fonctions u_3 et u_4 sont définies pour tout réel x par $u_3(x) = e^{3x}$ et $u_4(x) = e^{2x}$.

    (b) Montrer enfin que dim(Ker(g))=2

Exercice n°2

Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce donnant Pile avec probabilité p. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile. On note, pour un entier naturel non nul i, P_i l'évènement "Obtenir pile au i-ème lancer".
On note alors X_1 le rang d'apparition du premier Pile et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier Pile jusqu'à l'apparition du deuxième Pile.
Par exemple, si les lancers donnent dans cet ordre :Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, alors $[X_1 = 2]$ et $[X_2 = 4]$ se réalisent.

1. Reconnaitre la loi de X_1 et la loi de X_2.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
3. En déduire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$P\,(X_1 + X_2 = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus sur toute l'expérience.

5. Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en argument d'entrée le réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
    Y=0
    np_pile=0
    while ...:
        if ... :
            nb_pile=nb_pile+1
        else:
            ...
    return(Y)
```

6. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.
7. En déduire l'espérance de Y, la variance de Y et la loi de Y.

Une fois le second Pile obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de Face, alors on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue alors un unique tirage dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note également $V = Y - U$.

8. Écrire une fonction Python `simul_UV`, prenant en argument d'entrée la valeur du réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation du couple (U, V). On pourra faire appel à la fonction simul_Y définie à la question 5 .

9. Justifier que $U(\Omega) = \mathbf{N}$ et préciser $V(\Omega)$.
10. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, déterminer $P(U = k)$.
11. Montrer que la variable aléatoire $U + 1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra. En déduire l'espérance et la variance de U.
12. Montrer que V suit la même loi que U.
13. (a) Montrer que U et V sont indépendantes.
    (b) En déduire la covariance du couple (Y, U) : $Cov(Y, U) = E(YU) - E(Y)E(U)$.
    (c) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire défini par $\rho(Y, U = \dfrac{Cov(Y, U)}{\sqrt{V(Y)V(U)}}$ du couple (Y, U) est égal à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice n°3

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Seul le résultat de la question 4 de la partie 1 est utilisé dans la partie 2 à l'endroit indiqué (à la question 8).

Partie 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.
2. (a) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$$

   où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ quand n est un entier naturel non nul de f et $f^{(0)} = f$.

   Indication : dans l'hérédité, on effectuera une intégration par parties.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la dérivée $f^{(n)}$ de f est donnée par :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$$

   (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$$

3. Soit x un réel de $]0, 1[$.
   (a) Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0, x]$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$$

   (c) On admet que :$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$. Montrer que : $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \, \mathrm{d}t = 0$$

4. Soit x un réel de $]0,1[$. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$$

Partie 2

Soit p un réel fixé dans l'intervalle $]0,1[$.
On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$ mutuellement indépendantes, de même loi, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1-p$$

Posons :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

5. Écrire une fonction Python simulY (p) qui prend en argument la valeur de p et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_0, c'est-à-dire qu'elle doit renvoyer 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité $1-p$.
6. Écrire une fonction Python marche (n, p) prenant en argument le couple (n,p) et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_n.
7. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Z_n = \dfrac{Y_n+1}{2}$.
   (a) Reconnaître la loi de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son(ses) paramètre(s).
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?
   (c) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.
8. On note pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

9. On considère dans cette question le cas où $p \neq \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que : $0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$.
   (b) Montrer à l'aide de la partie 1 que la série $\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ converge et déterminer sa somme.
10. On considère dans cette question le cas où $p = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Montrer que : $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ diverge et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.