Composite

E C G

Correction du DS n°4

Option Économique

MATHÉMATIQUES

16 Novembre 2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.
Dans tout ce sujet on supposera les commandes Python suivantes exécutées :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice n°1 - EDHEC 2009

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie I

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. On considère l'application f qui, à tout P de E, associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, où P' et P'' sont les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

RÉPONSE:

Soit $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'' - 5(\lambda P + Q) + 6\lambda P + Q = \lambda(P'' - 5P' + 6P) + Q'' - 5Q' + 6Q = \lambda f(P) + f(Q)$$

Donc f est linéaire.
D'autre part, pour $P \in E$, $P = aX^2 + bx + c$, on trouve

$$\begin{aligned} f(P) &= (2a) - 5(2aX + b) + 6(aX^2 + bX + c) \\ &= 6aX^2 + (6b - 10a)X + 2a - 5b + 6c \end{aligned}$$

Donc $f(P) \in E$ et

f est un endomorphisme de E.

* * *

2. Écrire la matrice A de f relativement à la base $\mathcal{C}$.

RÉPONSE:

On trouve rapidement que $f(1) = 6$, $f(X) = 6X - 5$ et $f(X^2) = 6X^2 - 10X + 2$ La matrice canoniquement associée est

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix}}$$

* * *

3. (a) Montrer que f est un automorphisme de E. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

RÉPONSE:

La matrice associée à f est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale. Elle est donc inversible, donc f est bijectif.

$$\boxed{\boldsymbol{f \text{ est un automorphisme de } E.}}$$

* * *

(b) Écrire la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$.

RÉPONSE:

La matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$ est A^{-1}. On trouve après calculs

$$\boxed{\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/6} & \mathbf{5/36} & \mathbf{19/108} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/6} & \mathbf{5/18} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1/6} \end{pmatrix}}$$

* * *

4. Montrer que l'ensemble $E_6 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, AX = 6X\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.

RÉPONSE:

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 6X \Leftrightarrow (A - 6I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = y = 0$$

Donc $E_6 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\boldsymbol{E_6 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \text{ de base } \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right), \text{ de dimension 1.}}}$$

* * *

5. (*) La matrice A est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

La matrice A n'a qu'une seule valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $1 \neq 3$.

A n'est pas diagonalisable.

* * *

Partie II

On note F l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et Id l'endomorphisme identité de F. On considère g l'application qui, à toute fonction de F, associe $g(u) = u'' - 5u' + 6u$, où u' et u'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de u.

6. Montrer que g est un endomorphisme de F .

RÉPONSE:

* * *

7. Dans cette question, on se propose de déterminer de $\text{Ker}(6 - Id)$. On considère donc une fonction u élément de $\text{Ker}(g - 6Id)$.
   (a) Montrer que la fonction j, définie pour tout réel x par $j(x) = u'(x)e^{-5x}$ est constante.

RÉPONSE:

La fonction j est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe C^∞. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$j'(x) = u''(x)e^{-5x} - 5u'(x)e^{-5x}$$

Comme u est un élément de $\text{Ker}(g - 6Id)$, on a $g(u) = 6u$ donc $u'' - 5u' + 6u = 6u$ ou encore $u'' - 5u' = 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ j'(x) = e^{-5x}(u''(x) - 5u'(x)) = 0 \text{ donc } j \text{ est constante.}}$$

* * *

   (b) En déduire que $\text{Ker}(g - 6Id) = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et u_2 la fonction définie pour tout réel x par $u_2(x) = e^{5x}$.

RÉPONSE:

La réciproque est donne également que si j est constante, alors $u \in \text{Ker}(g - 6id)$. Donc d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
u \in \text{Ker}(g - 6id) &\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, j(x) = K_1 \\
&\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = K_1 e^{5x} \\
&\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}, \exists K_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = K_1 e^{5x} + K2 \\
&\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}, \exists K_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = K_1 u_2(x) + K2u_1(x) \\
&\Leftrightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}, \exists K_2 \in \mathbb{R}, u = K_1 u_2 + K_2 u_1 \\
&\Leftrightarrow u \in \text{Vect}(u_1, u_2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Ainsi } \text{Ker}(g - 6id) = \text{Vect}(u_1, u_2).}$$

* * *

On se propose, dans les trois questions suivantes de déterminer $\text{Ker}\,(g)$. On considère donc u une fonction de $\text{Ker}\,(g)$.

8. On pose $v = u' - 2u$. Montrer que $v' = 3v$ et en déduire une expression générale de v

RÉPONSE:

On sait que $u \in \text{Ker}(g)$, donc $g(u) = 0$, c'est à dire $u'' - 5u' + 6u = 0$. La fonction v est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe C^∞ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$v'(x) = u''(x) - 2u'(x) = 5u' - 6u - 2u' = 3u' - 6u = 3(u' - 2u) = 3v$$

Ainsi v est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène. Donc il existe $K_3 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\boldsymbol{v(x) = K_3 e^{3x}}}$$

* * *

9. On pose $w = u' - 3u$. Montrer que $w' = 2w$ et en déduire une expression générale de w.

RÉPONSE:

De la même façon, on a w de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$w'(x) = u''(x) - 3u'(x) = 5u' - 6u - 3u' = 2u' - 6u = 2(u' - 3u) = 2w$$

Ainsi w est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène. Donc il existe $K_4 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\boldsymbol{w(x) = K_4 e^{2x}}}$$

* * *

10. (a) Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que $\text{Ker}\,(g) = \text{Vect}\,(u_3, u_4)$, où les fonctions u_3 et u_4 sont définies pour tout réel x par $u_3(x) = e^{3x}$ et $u_4(x) = e^{2x}$.

RÉPONSE:

Si u est élément de $\text{Ker}\,(g)$ il existe deux réels α et β tels que, partout réel x :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x) = u'(x) - 2u(x) = \alpha\, e^{3x} \\ w(x) = u'(x) - 3u(x) = \beta\, e^{2x} \end{array} \right. \quad L_1 - L_2 \quad \text{alors } u(x) = \alpha\, e^{-3x} - \beta\, e^{-2x} = \alpha\, u_3(x) - \beta\, u_4(x)$$

Donc $u \in \text{Vect}\,(u_3, u_4)$

Réciproquement si $u \in \text{Vect}\,(u_3, u_4)$ alors il existe α et β réels tel que $u(x) = \alpha\, e^{3x} + \beta\, e^{2x}$ pour tout x réels.

Et on a alors $u'(x) = 3\alpha\, e^{3x} + 2\beta\, e^{2x}$ et $u''(x) = 9\alpha\, e^{3x} + 4\beta\, e^{2x}$

Donc

$$\begin{array}{rcl} g(u)(x) & = & 9\alpha\, e^{3x} + 4\beta\, e^{2x} \\ & & -5\left(3\alpha\, e^{3x} + 2\beta\, e^{2x}\right) \\ & & +6\left(\alpha\, e^{3x} + \beta\, e^{2x}\right) \\ & = & 0 \end{array}$$

et $u \in \text{Ker}\,(g)$

$$\boxed{\boldsymbol{\text{Ker}\,(g) = \text{Vect}\,(u_3, u_4)}}$$

* * *

(b) Montrer enfin que dim(Ker(g))=2.

RÉPONSE:

Soient α et β tels que $\alpha\ u_3+\beta\ u_4=0$ alors $(\alpha\ u_3+\beta\ u_4)'=3\alpha\ u_3+2\beta\ u_4=0$ donc $\alpha u_3=0$ et en $x=0$: $\alpha=0$ d'où $\beta=0$
Donc (u_3,u_4) est libre et génératrice de $\mathrm{Ker}\,(g)$ donc en est une base.

$$\boxed{\textbf{dim}\,(\textbf{Ker}\,(\boldsymbol{g}))=\mathbf{2}}$$

* * *

Exercice n°2 - Ecricome 2023 Sujet 0 n°2

Soit $p\in]0,1[$. On considère une pièce donnant Pile avec probabilité p. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile. On note, pour un entier naturel non nul i, P_i l'évènement "Obtenir pile au i-ème lancer".
On note alors X_1 le rang d'apparition du premier Pile et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier Pile jusqu'à l'apparition du deuxième Pile.
Par exemple, si les lancers donnent dans cet ordre :Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, alors $[X_1=2]$ et $[X_2=4]$ se réalisent.

1. Reconnaitre la loi de X_1 et la loi de X_2.

RÉPONSE:

X_1 désigne le rang d'apparition du premier succès (« obtenir Pile ») dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès p.

$$\boxed{\textbf{\textit{Ainsi } }\boldsymbol{X_1}\textbf{\textit{ suit la loi géométrique de paramètre }}\boldsymbol{p}\textbf{\textit{.}}}$$

En comptant les lancers à partir de celui qui suit le premier Pile, X_2 désigne de même le rang d'apparition du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès p, donc

$$\boxed{\boldsymbol{X_2}\textbf{\textit{ suit la loi géométrique de paramètre }}\boldsymbol{p}\textbf{\textit{.}}}$$

* * *

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1,X_2).

RÉPONSE:

On a $X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)=(\mathbb{N}^*)^2$.
Soit $(k,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$. En notant, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, P_i l'événement « obtenir Pile au i-ème lancer » et $F_i=\overline{P_i}$,

$$[X_1=k]\cap[X_2=j]=F_1\cap\cdots\cap F_{k-1}\cap P_k\cap F_{k+1}\cap\cdots\cap F_{k+j-1}\cap P_{k+j},$$

donc par indépendance des événements intervenant dans cette intersection,

$$\begin{aligned}P\big([X_1=k]\cap[X_2=j]\big)&=P(F_1)\cdots P(F_{k-1})\,P(P_k)\,P(F_{k+1})\cdots P(F_{k+j-1})\,P(P_{k+j})\\&=(1-p)^{k-1}\,p\,(1-p)^{j-1}\,p=p^2(1-p)^{k+j-2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{\textit{Ainsi }}\boldsymbol{\forall(k,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ P\big([X_1=k]\cap[X_2=j]\big)=p^2(1-p)^{k+j-2}}\textbf{\textit{.}}}$$

En déduire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

RÉPONSE:

Pour tout $(k,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$P\big([X_1=k]\cap[X_2=j]\big) = p^2(1-p)^{k+j-2} = p(1-p)^{k-1}\cdot p(1-p)^{j-1} = P(X_1=k)\,P(X_2=j),$$

donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

* * *

* * *

3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$P\left(X_1+X_2=n\right) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$

RÉPONSE:

Soit $n \geq 2$ un entier. D'après la formule des probabilités totales appliquée à $[X_1+X_2=n]$ avec le système complet d'événements $\big([X_1=k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$,

$$\begin{aligned} P([X_1+X_2=n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X_1=k]\cap[X_1+X_2=n]\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X_1=k]\cap[X_2=n-k]\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{k+(n-k)-2} \qquad \textit{car pour } n-k\leq 0,\ n-k\notin X_2(\Omega) \textit{ donc } P\big([X_1=k]\cap[X_2=n-k]\big) = \\ &= (n-1)\,p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 2$, $P([X_1+X_2=n]) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$.

* * *

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus sur toute l'expérience.

4. Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en argument d'entrée le réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
    Y=0
    np_pile=0
    while ...:
        if ... :
            nb_pile=nb_pile+1
        else:
            ...
    return(Y)
```

RÉPONSE:

```
import numpy.random as rd

def simul_Y(p):
    Y = 0
    nb_pile = 0
    while nb_pile < 2:
        if rd.random() < p:
            nb_pile = nb_pile + 1
        else:
            Y = Y + 1
    return Y
```

* * *

5. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.

RÉPONSE:

On remarque que

$$\boxed{\boldsymbol{Y = X_1 + X_2 - 2}}$$

puisque le nombre total de lancers effectués à la fin de l'expérience est égal à $X_1 + X_2$, et exactement deux de ces lancers sont des Piles.

* * *

6. En déduire l'espérance de Y, la variance de Y et la loi de Y.

RÉPONSE:

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) - 2 = \frac{2}{p} - 2.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\text{Donc } E(Y) = \frac{2(1-p)}{p}.}}$$

Par indépendance de X_1 et X_2,

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2).$$

$$\boxed{\boldsymbol{\text{Donc } V(Y) = \frac{2(1-p)}{p^2}.}}$$

On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P([Y = n]) = P(X_1 + X_2 = n + 2).$$

$$\boxed{\boldsymbol{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N},\ P([Y = n]) = (n+1)\,p^2(1-p)^n.}}$$

* * *

Une fois le second Pile obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de Face, alors on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue alors un unique tirage dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note également $V = Y - U$.

7. Écrire une fonction Python `simul_UV`, prenant en argument d'entrée la valeur du réel p de $]0, 1[$, et renvoyant une simulation du couple (U, V). On pourra faire appel à la fonction simul_Y définie à la question 5 .

RÉPONSE:

```
def simul_UV(p):
    n = simul_Y(p)
    U = rd.randint(0, n + 1)
    V = n - U
    return U, V
```

* * *

8. Justifier que $U(\Omega) = \mathbf{N}$ et préciser $V(\Omega)$.

RÉPONSE:

Pour chaque valeur possible $n \in \mathbb{N}$ de Y, U peut prendre toutes les valeurs de 0 à n. Ainsi,

$$\boxed{\boldsymbol{U(\Omega) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [\![0, n]\!] = \mathbb{N}.}}$$

Pour chaque valeur possible $n \in \mathbb{N}$ de Y, V peut prendre toutes les valeurs de $n - 0 = n$ à $n - n = 0$,

$$\boxed{\textbf{\textit{donc on a également }} \boldsymbol{V(\Omega) = \mathbb{N}.}}$$

* * *

9. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, déterminer $P(U = k)$.

RÉPONSE:

D'après la formule des probabilités totales appliquée à $[U = k]$ avec le système complet d'événements $\big([Y = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$P([U = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[Y=n]}(U = k)\, P(Y = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)p^2(1-p)^n,$$

où l'on a remarqué que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[Y = n]$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$, et en particulier $P_{[Y=n]}(U = k) = 0$ si $n < k$.
Ainsi, à l'aide du changement d'indice $\ell = n - k$:

$$P([U = k]) = p^2 \sum_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n = p^2(1-p)^k \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^\ell = \frac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)} \qquad \textit{car } |1-p| < 1.$$

$$\boxed{\textbf{\textit{Ainsi, }} \boldsymbol{\forall k \in \mathbb{N},\ P([U = k]) = p(1-p)^k.}}$$

* * *

10. Montrer que la variable aléatoire $U + 1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra. En déduire l'espérance et la variance de U.

RÉPONSE:

$U(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(U + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P([U + 1 = k]) = P([U = k - 1]) = p(1-p)^{k-1},$$

donc $U+1$ suit la loi géométrique de paramètre p.
On en déduit, par linéarité de l'espérance et par propriété de la variance :

$$E(U) = E(U+1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}, \qquad V(U) = V(U+1) = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$\boxed{\textbf{Ainsi, } \boldsymbol{E(U) = \frac{1-p}{p}} \textbf{ et } \boldsymbol{V(U) = \frac{1-p}{p^2}}.}$$

* * *

11. Montrer que V suit la même loi que U.

RÉPONSE:

On a déjà justifié que $V(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[V=k]$ avec le système complet d'événements $\big([Y=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
P(V=k) &= P([Y-U=k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[Y=n]}([Y-U=k])\, P([Y=n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[Y=n]}([U=n-k])\, P([Y=n]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)p^2(1-p)^n \qquad \textit{en reprenant le calcul de la question 10} \\
&= P([U=k]).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Ainsi, } \boldsymbol{U} \textbf{ et } \boldsymbol{V} \textbf{ suivent la même loi.}}$$

* * *

12. (a) Montrer que U et V sont indépendantes.

RÉPONSE:

Soit $(k,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
P\big([U=k] \cap [V=j]\big) &= P\big([U=k] \cap [Y-U=j]\big) \\
&= P\big([U=k] \cap [Y=k+j]\big) \\
&= P_{[Y=k+j]}(U=k)\, P(Y=k+j) \\
&= \frac{1}{k+j+1} \cdot (k+j+1)p^2(1-p)^{k+j} \\
&= p(1-p)^k \cdot p(1-p)^j \\
&= P([U=k])\, P([V=j]).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{Ainsi, } \boldsymbol{U} \textbf{ et } \boldsymbol{V} \textbf{ sont indépendantes.}}$$

* * *

(b) En déduire la covariance du couple (Y,U) : $Cov(Y,U) = E(YU) - E(Y)E(U)$.

RÉPONSE:

Par linéarité de l'espérance, $E(YU) = E((V+U)U) = E(VU) + E(U^2)$ et $E(Y)E(U) = E(V)E(U) + E(U)^2$. Par indépendance de U et V, $E(YU) = E(V)E(U) + E(U^2)$ et comme ces variables ont même loi

$$Cov(Y,U) = E(V)E(U) + E(U^2) - (E(V)E(U) + E(U)^2) = E(U^2) - E(U)^2 = V(U) = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

* * *

(c) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire défini par $\rho(Y,U = \dfrac{Cov(Y,U)}{\sqrt{V(Y)V(U)}}$ du couple (Y,U) est égal à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

RÉPONSE:

D'après les questions précédentes,

$$\rho(Y,U) = \frac{\mathrm{Cov}(Y,U)}{\sqrt{V(Y)\,V(U)}} = \sqrt{\frac{V(U)}{V(Y)}} = \sqrt{\frac{\frac{1-p}{p^2}}{\frac{2(1-p)}{p^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\boxed{\textbf{Donc } \rho(Y,U) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

* * *

Exercice n°3 - Ecricome 2023 sujet 0 n°1

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Seul le résultat de la question 4 de la partie 1 est utilisé dans la partie 2 à l'endroit indiqué (à la question 8).

Partie 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

RÉPONSE:

La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et positive. Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est elle-même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in [0,1[$, $1-x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et ne s'y annule pas

$$\boxed{\textbf{Par quotient, } f \textbf{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \textbf{ sur } [0,1[.}$$

* * *

2. (a) Soit $x \in]0,1[$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$$

où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ quand n est un entier naturel non nul de f et $f^{(0)} = f$.

Indication : dans l'hérédité, on effectuera une intégration par parties.

RÉPONSE:

Soit $x \in]0,1[$.

- **Initialisation.** *Remarquons que*

$$\sum_{k=0}^{0} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(1)}(t)\,\frac{(x-t)^0}{0!}\,dt = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + f(x) - f(0).$$

Donc pour $n = 0$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

- **Hérédité.** *Soit n un entier naturel. Supposons que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

Or les fonctions $f^{(n+1)}$ et $t \longmapsto \dfrac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe C^1 sur $[0,x]$.
Donc par intégration par parties,

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \left[f^{(n+1)}(t)\,\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x + \int_0^x \left(f^{(n+1)}\right)'(t)\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt.$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \left[f^{(n+1)}(t)\,\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + f^{(n+1)}(0)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\,\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt.
\end{aligned}$$

- **Conclusion.** *Donc par le principe de récurrence,*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.}$$

* * *

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la dérivée $f^{(n)}$ de f est donnée par :

$$\forall x \in [0,1[,\quad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}$$

RÉPONSE:

- **Initialisation.** *Par convention* $f^{(0)} = f$. *Et* $\forall x \in [0,1[$,

$$\frac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}\cdot 0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x).$$

Donc pour $n = 0$, $\forall x \in [0,1[$, $f^{(0)}(x) = \dfrac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}\cdot 0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}}$.

- **Hérédité.** *Soit* n *un entier naturel. Supposons que*

$$\forall x \in [0,1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Alors en dérivant cette expression, $\forall x \in [0,1[$ *:*

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\frac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2\cdot 2(n+1)}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

- **Conclusion.** *Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel* n,

$$\boxed{\forall \boldsymbol{x \in [0,1[}, \quad \boldsymbol{f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.}}$$

* * *

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \,\mathrm{d}t$$

RÉPONSE:

D'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}(1-t)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}\frac{x^k}{4^k} + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n \in \mathbb{N}},\ \forall \boldsymbol{x \in [0,1[}, \quad \boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt.}}$$

* * *

3. Soit x un réel de $]0,1[$.

(a) Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

RÉPONSE:

- **Initialisation.** *Par convention* $f^{(0)} = f$. *Et* $\forall x \in [0,1[$,

$$\frac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}\cdot 0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = f(x).$$

Donc pour $n = 0$, $\forall x \in [0,1[$, $f^{(0)}(x) = \dfrac{(2\cdot 0)!}{2^{2\cdot 0}\cdot 0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}}$.

- **Hérédité.** *Soit* n *un entier naturel. Supposons que*

$$\forall x \in [0,1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Alors en dérivant cette expression, $\forall x \in [0,1[$ *:*

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-n-\frac{1}{2}\right)(-1)(1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2\cdot 2(n+1)}\right)(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}} = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}(1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

- **Conclusion.** *Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel* n,

$$\boxed{\forall \boldsymbol{x \in [0,1[}, \quad \boldsymbol{f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.}}$$

* * *

(b) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \,\mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)$$

RÉPONSE:

oit n *un entier naturel.*
Par la décroissance de φ_x *sur* $[0,x]$, $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \dfrac{x-t}{1-t} \leq x$.
Et par croissance de la fonction $u \mapsto u^n$, $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$.
Or $\forall t \in [0,x]$, $(1-t)^{-\frac{3}{2}} > 0$. *Donc*

$$\forall t \in [0,x], \quad 0 \leq (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \leq (1-t)^{-\frac{3}{2}}x^n.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq x^n\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Or

$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \left[2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x = 2\left((1-x)^{-\frac{1}{2}}-1\right).$$

$$\boxed{\boldsymbol{Ainsi}\ \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).}}$$

* * *

(c) On admet que :$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}$. Montrer que : $\dfrac{n+1}{2^{2n+2}}\begin{pmatrix}2n+2\\ n+1\end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$.

RÉPONSE:

Rappelons que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{n!\,(n+1)!}\,\frac{1}{2^{2n+2}}.$$

Or $(2n+2)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi(n+1)}\,(2n+2)^{2n+2}e^{-(2n+2)}$ *et* $(n+1)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}$.

Donc

$$\frac{(2n+2)!}{n!\,(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi(n+1)}\,(2n+2)^{2n+2}e^{-(2n+2)}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}.$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4\pi(n+1)}\,(2n+2)^{2n+2}e^{-(2n+2)}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\cdot\sqrt{2\pi(n+1)}\,(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}} &= \sqrt{\frac{4\pi(n+1)}{4\pi^2 n(n+1)}}\cdot\frac{(2n+2)^{2n+2}}{n^n(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{e^{-2n-2}}{e^{-2n-1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{2^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}}\,n^n\cdot e^{-1} = \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n+1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}.\end{aligned}$$

Or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \quad et \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. *Alors, par continuité de l'exponentielle en* 1,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1.$$

Ainsi

$$\frac{(2n+2)!}{n!\,(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+2}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Finalement

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{2^{2n+2}}}\binom{\boldsymbol{2n+2}}{\boldsymbol{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}.}$$

* * *

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n\,\mathrm{d}t = 0$$

RÉPONSE:

D'après la question 3.(b),

$$0 \le \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \le \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

D'après la question précédente,

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right) = 0 \quad car\ 0<x<1.$$

Ainsi, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt = 0.}$$

* * *

4. Soit x un réel de $]0,1[$. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$$

RÉPONSE:

Soit x un réel de $]0,1[$.
D'après la question 2.(c), $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et d'après la question précédente,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Donc la série $\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.}$$

* * *

Partie 2

Soit p un réel fixé dans l'intervalle $]0,1[$.
On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$ mutuellement indépendantes, de même loi, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(Y_n=1)=p \quad\text{et}\quad \mathbb{P}(Y_n=-1)=1-p$$

Posons :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

5. Écrire une fonction Python simulY (p) qui prend en argument la valeur de p et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_0, c'est-à-dire qu'elle doit renvoyer 1 avec une probabilité p et -1 avec une probabilité $1-p$.

RÉPONSE:

```
def simulY(p):
    if rd.random() < p:
        return 1
    return -1
```

* * *

6. Écrire une fonction Python marche (n, p) prenant en argument le couple (n, p) et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X_n.

RÉPONSE:

```
def marche(n, p):
    X = 0
    for k in range(n):
        X += simulY(p)
    return X
```

* * *

7. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

   (a) Reconnaître la loi de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son(ses) paramètre(s).

RÉPONSE:

Soit n un entier naturel. $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(Z_n = 1) = P(Y_n = 1) = p$.

Donc Z_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

* * *

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

RÉPONSE:

Comme les variables aléatoires $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes.

Donc la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

* * *

   (c) Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.

RÉPONSE:

Procédons par récurrence sur n.

- **Initialisation.** *Par définition $X_1 = Y_1$ et $Z_1 = \dfrac{Y_1 + 1}{2}$. Donc $X_1 = 2Z_1 - 1$.*
- **Hérédité.** *Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.*

  Par définition $X_{n+1} = X_n + Y_n$. Or $Y_n = 2Z_n - 1$.
  Et par hypothèse de récurrence,

$$X_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n + 2Z_n - 1 = 2\sum_{k=0}^{n} Z_k - (n+1).$$

- **Conclusion.** *Ainsi par le principe de récurrence,* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\boxed{X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.}$$

* * *

8. On note pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

RÉPONSE:

Soit n *un entier naturel.*

$\diamond$ $p_{2n+1} = P(X_{2n+1} = 0) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n} Z_k - (2n+1) = 0\right) = P\left(\sum_{k=0}^{2n} Z_k = n + \frac{1}{2}\right)$.

Or la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{2n} Z_k$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}$ *et* $n + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

Donc $P\left(\sum_{k=0}^{2n} Z_k = n + \frac{1}{2}\right) = 0$. *Ainsi* $p_{2n+1} = 0$.

$\diamond$ $p_{2n} = P(X_{2n} = 0) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k - 2n = 0\right) = P\left(\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right)$.

Or la variable aléatoire $\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k$ *suit une loi binomiale de paramètre* $(2n, p)$.

Donc $P\left(\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$.

$$\boxed{\textbf{Ainsi } p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.}$$

* * *

9. On considère dans cette question le cas où $p \neq \frac{1}{2}$.

   (a) Montrer que : $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

RÉPONSE:

La fonction $u \mapsto u(1-u)$ *est une fonction de classe* C^1 *sur* $[0,1]$ *et de dérivée* $u \mapsto 1-2u$.
Donc le tableau de variations de $u \mapsto u(1-u)$ *est le suivant :*

u	0		$\frac{1}{2}$		1
$u \mapsto u(1-u)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

$$\boxed{\textbf{Donc } \forall p \in]0,1[,\ p \neq \frac{1}{2},\ 0 < p(1-p) < \frac{1}{4}.}$$

* * *

   (b) Montrer à l'aide de la partie 1 que la série $\sum_{n \geqslant 0} p_{2n}$ converge et déterminer sa somme.

RÉPONSE:

D'après la partie 1, en posant $\frac{x}{4} = p(1-p)$ *(ce qui est possible car* $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$*), la série*

$$\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \left(p(1-p)\right)^n$$

converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(p(1-p)\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

Or $1-4p(1-p) = 1+4p^2-4p = (1-2p)^2$.
Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ *converge et*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n} = \frac{1}{|1-2p|}.}$$

* * *

10. On considère dans cette question le cas où $p = \frac{1}{2}$.

(a) Montrer que : $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

RÉPONSE:

$p_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}$.
Or $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}$.
Donc

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n \cdot n^{2n}e^{-2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Alors $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{2^{2n}}$.

$$\boxed{\textbf{Donc } p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$$

* * *

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} p_{2n}$ diverge et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

RÉPONSE:

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge et* $p_{2n} \geq 0$.
Donc par critère de comparaison, $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ *diverge.*

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{2n} \geq 0$.
Donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty.}$$

* * *