Composite

E C G

Sujet de la semaine n°8

Option Économique

MATHÉMATIQUES

9 novembre 2026

Exercice n°1 - EDHEC 2005

1. f est définie pour tout matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   N.B. Comme $f(M)$ est définie à partir des coefficients de la matrice M, pour calculer $f(\alpha M+\beta N)$ il faut d'abord calculer les coefficients.$\alpha M+\beta N$.
   Pour toutes matrices $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β de $\mathbb{R}$ on a :
   $\alpha M+\beta N=\begin{pmatrix} \alpha a+\beta a' & \alpha c+\beta c' \\ \alpha b+\beta b' & \alpha d+\beta d' \end{pmatrix}$
   donc

$$\begin{aligned} f(\alpha M+\beta N) &= \alpha M+\beta N+\left(\alpha a+\beta a'+\alpha d+\beta d'\right) I \\ &= \alpha M+(\alpha a+\alpha d) I+\beta N+\left(\beta a'+\beta d'\right) I \\ &= \alpha[M+(a+d) I]+\beta\left[N+\left(a'+d'\right) I\right] \\ &= \alpha f(M)+\beta f(N) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

2. (a) $f(J_1)=J_1+1I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2J_1+J_4$
   $f(J_2)=J_2+0I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=J_2$
   $f(J_3)=J_3+0I=J_3$
   $f(J_4)=J_4+1I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=J_1+2J_4$

   (b) On a donc les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{C}=(J_1,J_2,J_3,J_4)$
   Les coordonnée de $f(J_1)$ sont $(2,0,0,1)$, celle de $f(J_2)$ sont $(0,1,0,0)$ celles de $f(J_3)$ sont $(0,0,1,0)$ et enfin celle de $f(J_4)$ sont $(1,0,0,2)$
   Donc la matrice A de f dans la base (J_1,J_2,J_3,J_4) est $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) Comme sa matrice dans la base (J_1,J_2,J_3,J_4) est symétrique, f est alors diagonalisable.

3. (a) On montre que la famille (J_1-J_4,J_2,J_3,I) est libre :
   Soient $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$

Si $x\,(J_1 - J_4) + y\,J_2 + z\,J_3 + t\,I = 0$ alors $\begin{pmatrix} x+t & y \\ z & -x+t \end{pmatrix} = 0$

D'où $y = z = 0$

et de $x + t = 0$ et $x - t = 0$ en additionnant on tire $x = 0$ et $t = 0$

Donc la famille $\mathcal{B} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est libre dans un espace vetoriel de dimension 4,

Conclusion : $\boxed{\text{C'est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

(b) On calcule le images puis leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$f(J_1 - J_4) = f(J_1) - f(J_4) = 2J_1 + J_4 - J_1 - 2J_4 = J_1 - J_4$ (coordonnées $(1,0,0,0)$ dans $\mathcal{B}$)

$f(J_2) = J_2$ (coordonnées $(0,1,0,0)$ dans $\mathcal{B}$)

$f(J_3) = J_3$ (coordonénes $(0,0,1,0)$ dans $\mathcal{B}$)

$f(I) = I + 2I = 3I$ (coordonnée $(0,0,0,3)$ dans $\mathcal{B}$)

Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$, matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$:

Comme $I = J_1 + J_4$ on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La formule de changement de base donne alors $\text{mat}_C(f) = \text{mat}_C\mathcal{B} \cdot \text{mat}_\mathcal{B} f \cdot \text{mat}_C\mathcal{B}$ donc

Conclusion : $\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

4. (a) On calcule P^{-1} par le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_1 + L_4 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_4/2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4/2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) Par récurrence :

- Pour $n = 0$ on a $P\,D^0 P^{-1} = I = A^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P\,D^n P^{-1}$
  alors $A^{n+1} = AA^n = P\,DP^{-1} P\,D^{n+1} P^{-1} = P\,D^{n+1} P^{-1}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n P^{-1}}$

(c) Comme la matrice D est triangulaire, on a directement ses puissance et

$$\begin{aligned} A^n &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+3^n}{2} & 0 & 0 & \dfrac{-1+3^n}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1+3^n}{2} & 0 & 0 & \dfrac{1+3^n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice n°2 - EDHEC 2017

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.
$\varphi(\alpha P+Q)(x) = \int_0^1 (\alpha P+Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t)+Q(x+t))dt = \alpha \int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$
On a donc bien , $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)$ et $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

(b) $\varphi(e_0)(x) = \int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$

$\varphi(e_1)(x) = \int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \int_0^1 xdt + \int_0^1 tdt = \Big[x.t\Big]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x + \frac{1}{2}$

$\varphi(e_2)(x) = \int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2dt = \int_0^1 x^2+2xt+t^2dt = \left[x^2.t + x.t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = x^2 + x + \frac{1}{3}$

Par conséquent : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0,\ \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \text{ et } \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\ .}$

(c) Montrons que φ est à valeurs dans E. Soit $P = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ un polynôme de E.
La linéarité de φ montre que $\varphi(P) = \alpha\varphi(e_0) + \beta\varphi(e_1) + \gamma\varphi(e_2)$.
Or ,comme on l'a vu au (b) :$\varphi(e_0) = e_0 \in E$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \in E$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2 \in E$ et E est stable par combinaison linéaire , donc $\boxed{\varphi(P) \in E.}$
φ est linéaire et à valeurs dans E, donc φ est un endomorphisme de E.

2. (a) D'après les résultats du 1.(b), la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est triangulaire avec 3 pivots non nuls , elle est donc inversible et φ est bijectif . φ est un automorphisme de E. (endomorphisme bijectif de E).

(c) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, A et donc φ admet 1 comme unique valeur propre. Ainsi, $\boxed{\text{Spec}(\varphi) = \{1\}}$
Raisonnons par l'absurde : si φ était diagonalisable, puisque 1 est la seule valeur propre de φ, il existerait une matrice P inversible telle que $PAP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $A = I$ ce qui est absurde !

Ainsi, φ n'est pas diagonalisable.

3. Les commandes `Scilab` suivantes affichent la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrer une valeur pour n:')
A=[1,1/2,1/3;0,1,1;0,0,1]
disp(A^n)
```

4. (a) Démontrons la propriété $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence :

• <u>initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$.

Un peu de rab : Pour $n = 1$, on a bien $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_1 = \dfrac{1}{3}$.

• <u>hérédité :</u> En supposant $P(n)$ vraie, calculons $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors , $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} & u_n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n + 2)$.

• <u>conclusion :</u> Pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n + 2)$.

(b) Puisque $u_0 = 0$,on a $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

Or $(u_{k+1} - u_k) = \dfrac{1}{6}(3k + 2)$,

donc $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{6}(3k + 2) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1} (3k) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1} 2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n-1} 1.$

Et pour finir : $u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{(n-1)n}{2} + \dfrac{n}{3} = n\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{n-1}{4}\right) = \dfrac{n(3n+1)}{12}$.

(c) Pour tout entier naturel n : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & \dfrac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice n°3 - Oral HEC 2016 E83

1. Cours.

2. (a) L'application φ est clairement un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. La linéarité est évidente ainsi que le fait que le degré de $\varphi(P)$ est inférieur au degré de P. Cel endomorphisme n'est pas injectif (donc non bijectif) car son noyau est formé des polynômes constants.

   (b) La famille ($H_0, H_1, \ldots, H_n$) est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

   (c) Un calcul immédiat donne : $\varphi(I_k)(X) = H_k(X+1) - II_k(X) = H_{k-1}(X)$.
   La matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls et les éléments de la sur-diagonale sont égaux à 1 , les autres éléments étant nuls.

   (d) La matrice triangulaire M' n'admet que la valeur propre 0 ; par suite, elle n'est pas diagonalisable.

3. (a) Soit Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ et α un réel. On a :
   $f_i(\alpha Q+R) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}(\alpha Q+R)(k) = \alpha\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}Q(k)+\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}R(k) = \alpha f_i(Q)+$
   $f_i(R)$.

   (b) Remarquons que si $j \in [\![0,p]\!], H_j(j) = 1$ et pour tout $k \in [\![0,j]\!], H_j(k) = 0$.
   On a alors : $\forall i \in [\![0,p]\!], f_i(H_i) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_i(k) = H_i(i) = 1$
   De plus, $\forall j \in \Big[0,p]\!], f_i(H_j) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_j(k) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}H_j(k) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\frac{1}{j!}\prod_{\ell=0}^{j-1}(k-\ell)$
   soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!], f_i(H_j) = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{i-j}{k-j} = \binom{i}{j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{i-k-j}\binom{i-j}{k}$
   soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!], f_i(I_j) = \binom{i}{j}(-1)^{i-j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^k\binom{i-j}{k} = 0$ d'après la formule du binôme.

   (c) On a : $f_i(X^p) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}k^p = a_0 f_i(H_0) + a_1 f_i(H_1) + \cdots + a_p f_i(H_p) = a_i$.