Algèbre linéaire 2 : dimension finie

ECE 2 Lycée international de Valbonne

3 novembre 2019

Table des matières

I Dimension finie

Proposition 1 (Cardinal d'une base)**.**
Soit E un espace vectoriel, on suppose que $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \ldots,\ \mathbf{e_n})$ est une base et que $(\mathbf{f_1},\ \mathbf{f_2},\ \ldots,\ \mathbf{f_p})$ est une autre base alors $p = n$. C'est à dire toutes les bases d'un même espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs

Attention : Cela ne veut pas dire qu'il existe une seule base, juste que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs

Définition 1 (Dimension)**.**
*Soit E un espace vectoriel. Si il existe une base $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \ldots, \mathbf{e_n})$ on dit alors que E est **de dimension finie** et on dit que la **dimension** de E est n, on note alors*

$$Dim\ E = n$$

Remarque : Si $E = \{0\}$ alors on dit que Dim $E = 0$, et une base de E est .

Proposition 2 (Dimension des espaces vectoriels classiques)**.**

1. *Dim* $\mathbb{R}^n =$
2. *Dim* $\mathbb{R}_n[X] =$
3. *Dim* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) =$

Démonstration :
Il suffit de compter le nombre de vecteurs constituant les bases canoniques

Proposition 3 (Sous espace-vectoriel)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E alors

1. *F est de dimension finie et Dim F Dim E*

2. *Si de plus Dim F = Dim E alors* .

Proposition 4 (Taille d'une famille génératrice)**.**
*Soit E un espace vectoriel **dont on connait la dimension** n.*
Soit $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_1},\ldots,\ \mathbf{e_p})$ une famille génératrice de E.

1. *Alors $n \leqslant p$*
2. *Si de plus $p = n$ alors cette famille est une de E*

Exemple :

Proposition 5 (Taille d'une famille libre)**.**
*Soit E un espace vectoriel **dont on connait la dimension** n.*
Soit $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_1},\ldots,\ \mathbf{e_q})$ une famille libre de E.

1. *Alors $q \quad n$*
2. *Si de plus $q = n$ alors cette famille est une base de E*

Exemple :

II Matrice d'une application linéaire

Remarque préliminaire : produit d'une matrice par une colonne Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

alors on constate que

$$x\begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix} = AX$$

Exercice 1.
Trouver une matrice A telle que pour tout x,y et z réels

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

II.1 Matrices colonnes des coordonnées

Si on connait une base $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ de E, alors tout vecteur est entièrement connu si on connait ses n coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Plutôt que de présenter les coordonnées sous forme d'une liste, on va voir qu'il est plus pratique de les manipuler sous la forme d'une matrice colonne, c'est ce que l'on nomme ...

Définition 2 (Matrice colonne des coordonnées dans une base)**.**
Soit $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \ldots,\ \mathbf{e_n})$ une base de E. Pour tout vecteur $\mathbf{x} \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2,\ \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne des coordonnées de $\mathbf{v}$, notée $X_{\mathscr{B}}$ est

$$X_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple :

- Soit $\mathbb{R}^3$ munit de la base canonique et $x = (1, 2, 3)$ alors la matrice des coordonnées de x dans la base est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B}$ sa base canonique et $P = 2 - X + X^3$, alors la matrice des coordonnées est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ munit de la base canonique $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,2}$ aors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors sa représentation est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

II.2 Matrice d'une application linéaire

II.2.a Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$ une base de E et $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_n})$ une base de F.
Pour tout vecteur $\mathbf{v} = x_1 \cdot \mathbf{e_1} + \cdots + x_p \cdot \mathbf{e_p}$ (les x_i sont les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$), on a :

$$f(\mathbf{v}) =$$

où les y_i sont les coordonnées de $f(\mathbf{v})$ dans la base $\mathscr{B}'$.
Si on écrit les coordonnées des vecteurs en colonnes, cette égalité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{matrix} = \qquad\qquad \begin{matrix} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{matrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \qquad\qquad .$$

Les coordonnées des vecteurs $f(\mathbf{e_i})$ suffisent donc à calculer l'image $f(\mathbf{v})$ de tout vecteurs $\mathbf{v}$ dont on connaît les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

Proposition 6 (Écriture matricielle d'une application linéaire)**.**
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_p})$ une base de E, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \cdots, \mathbf{f_n})$ une base de F et $f : E \to F$ une application linéaire.
Si on note

- *$X_{\mathscr{B}}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\mathbf{v}$ dans la base $\mathscr{B}$*
- *$Y_{\mathscr{B}'}$ la matrice colonne des coordonnées de l'image $f(\mathbf{v})$ dans la base $\mathscr{B}'$,*

alors on a la relation :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{array}{c} f(\mathbf{e_1}) \ldots f(\mathbf{e_p}) \\ \begin{pmatrix} \quad & & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X}$$

où la matrice à n lignes et p colonnes $A = (A_1, \cdots, A_p)$ est la matrice où les colonnes A_j sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ des vecteurs $f(\mathbf{e_j})$).
*La matrice A s'appelle la **matrice de l'application linéaire** f de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$, on la note*

$$A = Mat_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(f).$$

Ce que l'on peut représenter de la manière suivante

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \\
\mathbf{x} \arrow[r, mapsto, "\text{calcul direct}"'] \arrow[d, "\begin{array}{l}\text{calcul des coordonnées de x dans la base } \mathscr{B} \\ \mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e_1} + \cdots + x_p \cdot \mathbf{e_p}\end{array}"'] & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \\
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "\text{multiplication par A}"] & Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \arrow[u, "\begin{array}{l}\text{calcul de } \mathbf{y} \text{ à l'aide des coordonnées dans la base } \mathscr{C} \\ \mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{f_1} + \cdots + y_n \cdot \mathbf{f_n}\end{array}"'] \\
\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \arrow[r, "X \mapsto AX"'] & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Remarque :

Si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ et on dit matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Attention : Cette notation apparaît dans le programme contrairement à $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$, aucune notation n'est donnée pour le cas général. Dans les problèmes, on introduit dans la majorité des cas la matrice avec une phrase et la notation n'est pas utilisée.

Exercice 2.

Soit $\mathrm{id}_E : E \to E$ l'application identité et $\mathscr{B}$ une base de E montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = I$ où I désigne la matrice identité. c

Attention : il faut que la base de départ et la base d'arrivée soient les mêmes !

Exercice 3.

Calculer les matrices des applications linéaires suivantes

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, x - z)$. On prend pour $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et pour $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. $\Delta : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'application dérivée.
   On prend pour $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et pour $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

II.2.b Liens entre les opérations sur les matrices et les opérations sur les applications linéaires

Proposition 7 (Somme de matrice et applications linéaires)**.**
Soit $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
On note $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $B = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ leurs matrices associés et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

- $A + B = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\qquad)$.
- $\qquad = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\lambda f)$.

Attention : Il faut prendre la même base de départ et la même base d'arrivée pour représenter f et g.

Exercice 4.
Soit f l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$, écrire la matrice de $f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et $2f$ dans la base cannonique.

Théorème 1 (Isomorphisme)**.**
*Soit $\mathscr{B}$ une base de E espace vectoriel de dimension p et $\mathscr{C}$ une base de F de dimension n Les deux bases sont **fixées**.. alors l'application qui à $f \in \mathcal{L}(E, F)$ associe $Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*

Proposition 8 (Composition d'applications linéaires)**.**
Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires entres les espaces vectoriels E, F et G.
Alors $g \circ f$ est une $\qquad\qquad$.

Théorème 2 (Composition et produit de matrices)**.**
Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires et $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des bases respectives des espaces vectoriels de dimension finie E, F et G.
Si $A = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g)$ alors

$$Mat_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(g)\, Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f) = Mat_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(g \circ f).$$

Attention : Il faut bien faire attention aux bases utilisées pour écrire les matrices.

Proposition 9.
Soit f un isomorphisme de E vers F où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors F est aussi de dimension finie et $Dim\ F = Dim\ E$.

Proposition 10 (matrice d'une application linéaire bijective)**.**
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. La matrice de f est notée

$$A = Mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f).$$

Alors
A est inversible si et seulement si f est bijective.
Dans ce cas là

$$A^{-1} = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f^{-1}).$$

Attention : Il faut bien faire attention que lorsque l'on passe de la matrice de f à celle de f^{-1} les bases de départ et d'arrivée sont inversées.

II.3 Changement de base

II.3.a Pour un vecteur

Proposition 11 (Matrice de passage et calcul des coordonnées d'un vecteur.)**.**

Soient $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n})$, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n})$ *deux bases d'un espace vectoriel* E *et* $\mathbf{v}$ *un vecteur de* E*.*
On appelle ***matrice de passage*** *:*

$$P = \begin{array}{c c} \mathbf{f_1} \ \ldots\ldots \ \mathbf{f_n} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & * & \\ & & \end{array} \right) & \begin{array}{c} \mathbf{e_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e_n} \end{array} \end{array}$$

la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ *dont la* $j^{\text{ème}}$ *colonne est formée du vecteur colonne des coordonnées* $\mathbf{f_j}$ *exprimées dans la base* $\mathscr{B}$*, c'est à dire* $P_j = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\mathbf{f_j})$*.*
Cette matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ *permet de calculer les coordonnées dans* $\mathscr{B}$ *en fonction des coordonnées dans* $\mathscr{B}'$ *:*
On note $X_{\mathscr{B}}$ *la matrice du vecteur* $\mathbf{v}$ *dans la base* $\mathscr{B}$ *et* $X_{\mathscr{B}'}$ *la matrice des coordonnées dans la base alors*

$$X_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}$$

Cette matrice est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*.Il n'ya pas d'erreur dans le nom.*

Attention : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la notation du programme, dans les sujets cette notation est rarement utilisée, on introduit cette matrice à l'aide d'une phrase.

II.3.b Propriétés

Théorème 3 (Inverse d'une matrice de passage .)**.**
Soient $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n})$, $\mathscr{B}' = (\mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_n})$ deux bases d'un espace vectoriel E et $\mathbf{v}$ un vecteur de E.

$$P = \begin{array}{cc} \mathbf{f_1} \;\dots\dots\; \mathbf{f_n} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & * & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathbf{e_1} \\ \vdots \\ \mathbf{e_n} \end{array} \end{array}$$

La matrice P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\mathbf{e_j}$ exprimées dans la base $\mathscr{B}'$:

$$P^{-1} = \begin{array}{cc} \mathbf{e_1} \;\dots\dots\; \mathbf{e_n} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & * & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f_n} \end{array} \end{array}$$

Ce qui permet permet de calculer les coordonnée dans la base $\mathscr{B}'$ en fonction des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

$$P^{-1}X = X'$$

Remarque : On peut noter, selon le programme :

$$P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

La réciproque du théorème précedent est aussi juste et beaucoup plus facile.

Proposition 12 (Matrice d'une base)**.**
Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{F} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n})$ une famille de n vecteurs de E et $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ la matrice dont les colonnes $A_j = Mat_{\mathscr{B}}(\mathbf{v_j})$ sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs $\mathbf{v_j}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors

La matrice A est inversible si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E.

Exercice 5.

Montrer que toute famille de $n+1$ polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tels que pour tout i, $\deg(P_i) = i$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 13 (Opérations sur les matrices de passage)**.**
Soit $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ $\mathscr{B}''$ trois bases.
Si P est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnée dans $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}'$ et Q est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnée dans $\mathscr{B}'$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}''$ alors
La matrice PQ est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnées dans $\mathscr{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathscr{B}''$.

Cette proposition est une généralisation du théorème 3.

Exemple : Soient $\mathscr{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ et $\mathscr{B}'' = (X(X-1), (X-1)(X+1), X(X+1))$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$ (le vérifier !).
Pour calculer la matrice de passage P qui permet de calculer les cordonnées d'un polynôme dans la base $\mathscr{B}''$ à partir de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$, on peut utiliser les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ et la base canonique $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Les matrices $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les matrices dont les colonnes sont formées des coordonnées des polynômes de la base $\mathscr{B}'$, respectivement $\mathscr{B}''$ dans la base $\mathscr{C}$.
D'après la proposition énoncée ci dessus :

$$P = P_2^{-1} P_1.$$

On peut retrouver ce résultat en notant Z le vecteur colonne des coordonnées d'un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans la base $\mathscr{C}$, Z' celui de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ et Z'' celui de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}''$. On a alors

$$P_1 X' = X \text{ et } P_2 X'' = X \iff P_2^{-1}(P_1 Z') = Z''.$$

La matrice $P_2^{-1} P_1$ est bien la matrice P recherchée.

Par le calcul on obtient $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

II.3.c Pour une application linéaire

Théorème 4 (Formule du changement de base pour une application linéaire de E dans E)**.**
Soient $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire, $\mathscr{B}$ « l'ancienne » base de E et $\mathscr{B}'$ sa « nouvelle » base,

$$Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f) = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E)\, Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)\, Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id_E). \tag{E.1}$$

où id_E désigne l'application identité.

Si on note $A = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(g)$, alors

- *La matrice $P = Mat_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id_E)$ est la matrice de passage qui permet de calculer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ à partir des coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$.*
- *La matrice P est inversible , son inverse est $P^{-1} = Mat_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E)$.*
- *L'égalité (E.1) peut s'écrire sous la forme*
$$A' = P^{-1}AP.$$

Théorème 5 (Formule du changement de base La formule à retenir)**.**
En reprenant les notations précédentes

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\, Mat_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

Ce qui justifie le nom de la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ qui permet de passaer de la matrice de f dans $\mathcal{B}$ à celle dans $\mathcal{B}'$.

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[rr, "f"] & & E & \\
& \mathbf{x} & & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) & \\
\text{coordonnées de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}' & X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \arrow[rr, "\text{Multi. par } A'"] \arrow[d, "\text{Multi. par } P"'] & & Y' = A'X' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} & \text{coordonnées de } \mathbf{y} \text{ dans } \mathscr{B}' \\
\text{coordonnées de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B} & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[rr, "\text{Multi. par } A"'] & & Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \arrow[u, "\text{Multi. par } P^{-1}"'] & \text{coordonnées de } \mathbf{y} \text{ dans } \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

Pour résumer :

$$\boxed{\underbrace{Y'}_{\text{coordonnées de } f(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathscr{B}'} = \underbrace{P^{-1}\overbrace{A\,\underbrace{P\,\underbrace{X'}_{\text{coordonnées de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}'}}_{\text{coordonnées de } \mathbf{x} \text{ dans } \mathscr{B}}}^{\text{coordonnées de } f(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathscr{B}}}_{\text{coordonnées de } f(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathscr{B}'}}$$

Définition 3 (Matrices semblables)**.**
*Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc carrées) on dit que A et B sont **semblables** si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que*

$$B = P^{-1}AP$$

Remarque : Lorsque A et B sont les matrices de deux endomorphismes dans deux bases alors ces matrices sont semblables.

II.4 Polynômes annulateurs

Soit A une matrice **carrée** et P un polynôme à coefficients réels. Alors comme on peut calculer des produit et de sommes de matrices on peut calculer $P(A)$.

Exercice 6.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 + X + 1$ calculer $P(M)$.

Définition 4 (Polynôme annulateur d'une matrice)**.**
Soit P un polynôme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $P(A) = 0$ alors on dit que P est un polynôme annulateur de A.

Théorème 6 (Existence d'un polynôme annulateur)**.**
Soit A une matrice carrée, il existe toujours une infinité de polynômes annulateurs de A.

III Rang

III.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 5 (Rang d'une famille)**.**
Soient E un espace vectoriel et $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$ une famille de vecteurs.
*Le **rang** de cette famille est l'entier*

$$rg(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}) = dim\left(Vect\left(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}\right)\right).$$

Corollaire 1 (Rang et dimension)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p})$ une famille de vecteurs.
alors

- *$rg(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}) \leqslant n$ et il y a égalité si et seulement si la famille est .*
- *$rg(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_p}) \leqslant p$ et il y a égalité si et seulement si la famille est .*

III.2 Rang d'une application linéaire, d'une matrice

Théorème 7 (Famille génératrice de l'image)**.**
Soit f une application linéaire de E dans F avec E de dimension finie. Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p})$. Alors

$$Im\ f = Vect\,(f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \ldots, f(\mathbf{e_p}))$$

L'image d'une base par une application linéaire est une famille génératrice de l'image.

Remarque : Si la matrice A représente l'application linéaire dans une base. Alors une famille génératrice de l'image est la famille des colonnes. Mais il faut bien faire attention à la base choisie pour représenter la matrice dans (espace vectoriel d'arrivée.)

Définition 6 (Rang d'une application linéaire)**.**
On appelle rang d'une application linéaire f et on note $rg(f)$ la dimension de l'image de f.

Définition 7 (Rang d'une matrice)**.**
Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes. on le note $rg\ (A)$

Théorème 8 (Liens entre ces notions)**.**
Soit f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ alors

$$rg\ (f) = rg\ (A)$$

Proposition 14 (Rang et transposée)**.**
Soit A une matrice alors

$$rg\ ({}^{t}A) = rg\ (A)$$

III.3 Le théorème du rang

Théorème 9 (Le théorème du rang)**.**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire où E est un espace vectoriel de dimension finie.
On a alors :

$$dim(Im\ f) + dim(Ker\ f) = dim(E).$$

Exemple :

Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, -x + z, x - y)$, alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$ donc $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

Théorème 10 (Injectivité et surjectivité)**.**
Soit f $E \to F$ une application linéaire, où E et F sont des espaces vectoriels de ***même dimension finie****.*
Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

1. *f est injective.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*