

ALGÈBRE LINÉAIRE : DIMENSION FINIE

Familles de vecteurs

Exercice 1.

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- la famille $(x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$ est elle libre? Est elle une famille génératrice de E ?
- Montrer que la famille $(x \mapsto e^{kx})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre. Est ce une famille génératrice de E ?

Applications linéaires, représentation matricielle dans les bases canoniques

Exercice 2.

Soit l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x - y + z, x - y).$$

- Écrire la matrice de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
- Même question avec l'application linéaire g définie par :

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, y + 2z, 2x + 3y + 4z).$$

Exercice 3.

Soit l'application linéaire

$$d : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto P'.$$

Écrire la matrice de cette application relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4.

Soient les applications linéaires f et g définies par :

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \mapsto P(X+1). \quad P \mapsto P(X-1).$$

Écrire les matrices de ces applications relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, puis multiplier ces matrices entre elles. Que remarque t-on?

Exercice 5.

- Écrire la matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P \longmapsto (P(0), P(1), P(2)).$$

- Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, en déduire qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$. Calculer en fonction de a, b et c ce polynôme.

Dans d'autres base

Exercice 6.

Soit : $\mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$$P \mapsto P(X+1) - P(X)$$

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Écrire la matrice de f avec $\mathbb{R}_3[X]$ muni de la base $(1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$ et $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $(X(X-1), X(X+1), (X+1)(X-1))$.

Exercice 7.

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z)$$

et $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$ et $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 1)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ et $f(\mathbf{u}_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 8.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Définir l'application f telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Définir l'application g telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Définir l'application h telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{D}}(h)$ où $\mathcal{D}$ est la base $(1, 1+X, 1+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9.

On reprend les notations de l'exo 5.

On pose $P_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $P_1 = \frac{X(X-2)}{-1}$ et $P_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Écrire la matrice de l'application f en prenant comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ cette base et comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique.
3. En déduire une expression de f^{-1} de la forme

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X] . \\ (a, b, c) \mapsto ?$$

Matrices de passage

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer des vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ non nuls tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = -3\mathbf{w}$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice N de l'application f dans cette base.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.
Calculer son inverse P^{-1} .
5. Donner la relation entre les matrices M , N et P . En déduire le calcul de M^n .

Exercice 11.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \mapsto X(P(X+1) - P(X-1))$$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique

2. Écrire la matrice de φ dans la base $(1, -1 + X, -X + X^2, -X^2 + X^3)$

Exercice 12.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$

$$P \mapsto P'$$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. Écrire la matrice de φ dans la base $(X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3))$

Changement de bases, bases adaptées

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2 , en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathcal{B}' = ((1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1))$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B

Exercice 13.

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, e'_2 = e_3 + e_1, e'_3 = e_1 + e_2 \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases?

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2z, y - 2z, -z)$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2 , en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B

Exercice 15.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\text{Ker}(f)$.

Théorème du rang, image, noyaux

Exercice 16.

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et on

considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f et le rang de f .
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4, -2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 17.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$, et le rang de f .

Exercice 18.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$ ainsi que le rang de f .
2. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Problèmes

Exercice 19.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un vecteur $\mathbf{e}_1 \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$.
2. Déterminer un vecteur $\mathbf{e}_2 \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$.
3. Montrer que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
5. Calculer l'inverse de P , et écrire la matrice T de f dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
6. Quelle est la relation entre les matrices M, P et T ?
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 2n/2^n \\ 0 & 1/2^n \end{pmatrix}.$$

8. En déduire l'expression de M^n en fonction de n .
9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 9$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

- (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = (17n + 1) \cdot \frac{1}{2^n}.$$

- (c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 20. 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer une base $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
 (b) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
 (c) Calculer M^k pour tout entier $k \geq 0$.
 2. Même question avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21.

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.

De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \quad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \quad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \quad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

- (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$.
 (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $P(G_{n+1})$ et $P(H_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
 (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vérifier que } U_{n+1} = MU_n, \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ (a) Soient } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer PQ . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

- (b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P . Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4 .

- (c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
 (b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geq 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
 (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n , puis en déduire $P(E_n)$, $P(F_n)$, $P(G_n)$ et $P(H_n)$.
 (d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{2}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).
- (a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k .
 (b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k .
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.
- (a) Calculer $P(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.
 (b) Déterminer $P(S_n = n)$.
 (c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k , puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n .

Pour aller plus loin

Exercice 22.

Soit f et g deux endomorphisme de E un espace vectoriel. Montrer que $f \circ g = 0$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Exercice 23.

Endomorphismes qui commutent, noyaux et images Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrons que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im } u$ sont stables par v , c'est-à-dire que

$$v(\text{Ker } u) \subset \text{Ker } u \text{ et } v(\text{Im } u) \subset \text{Im } u.$$

Exercice 24.

Endomorphisme nilpotent et famille libre Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

Exercice 25.

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

Exercice 26.

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n et que

$$\text{Im } f = \text{Ker } f$$

Montrer que $f^2 = 0$ et que $n = 2\text{rg}(f)$.

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\mathbf{u}) \neq 0$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, f(\mathbf{u}), f^2(\mathbf{u}))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans cette base.
4. À l'aide de $\mathcal{B}$ trouver une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.

Exercice 28.

Soit l'application linéaire f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(0), P(1), P(-1)) \end{aligned}.$$

1. Écrire la matrice A de f dans les bases canoniques.
2. Déterminer une base de $\text{Ker } f$, l'application f est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$, l'application f est-elle surjective ?
4. Soit $F = \text{Vect} \left(-(X-1)(X+1), \frac{X(X+1)}{2}, -\frac{X(X-1)}{2} \right)$. M
5. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c , l'ensemble E des polynômes P tels que $f(P) = (a, b, c)$.

Exercice 29.

On considère l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } f^n$ et $\text{Im } f^n$.

Exercice 30.

Soient λ un nombre réel et f l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto XP' - \lambda P. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer, suivant les valeurs de λ , le noyau de f .