

Devoir surveillé de mathématiques
Sujet Composite réponses
Samedi 30 Novembre

EXERCICE 1

EDHEC 2011

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Pour tout i et tout k , éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".

Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

RÉPONSE:

$[X_i = 1]$ est "l'urne i n'a jamais été modifiée" c'est à dire que toutes les billes tirées l'on été dans d'autres urnes

$$[X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^n [\overline{U_{i,k}}]$$

$$X_i = 1 = \bigcap_{k=1}^n [\overline{U_{i,k}}]$$

Comme chaque choix d'urne se fait de façon indépendantes

$$P(U_{i,k}) = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n P(\overline{U_{i,k}}) \\ &= \prod_{k=1}^n (1 - P(U_{i,k})) \\ &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

*

(b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

RÉPONSE:

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}\right)$$

$$= P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^n P(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}})$$

les tirages

$$= \prod_{k=1}^n [1 - P(U_{i,k} \cup U_{j,k})]$$

$$= \prod_{k=1}^n [1 - P(U_{i,k}) - P(U_{j,k})] \quad \text{a un même tirage choisir deux urnes differentes sont des évènements}$$

$$= \prod_{k=1}^n \left[1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right]$$

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

*

(c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

RÉPONSE:

Soit n un entier

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

Donc comme $\frac{1}{n^2} > 0$.

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

Soit i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$,

On a donc

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

nous venons donc de démontré que

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) < P(X_i = 1) P(X_j = 1)$$

Si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables X_i et X_j en sont pas indépendantes.

*

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Déterminer l'espérance de Y_n , notée $E(Y_n)$.

RÉPONSE:

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$E(Y_n) = E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n E(X_k)$$

linéarité de l'espérance

$$= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

loi de Bernouilli

$$E(Y_n) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

*

(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

RÉPONSE:

On a donc pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

On a

$$\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

donc

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n}$$

puis

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} -1$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$$

Par continuité de la fonction exponentielle

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n} = e^{-1}$$

On a donc

$$\frac{E(Y_n)}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$$

et donc

$$E(Y_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-1}$$

*

3. Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

(a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

RÉPONSE:

N_i correspondant au nombre de billes manquante donc au nombre de fois où l'on a choisit l'urne i
On compte les succès "choisir l'urne i ", de probabilité $\frac{1}{n}$ l'ors de n tirage indépendants, c'est un modèle binomiale

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/n)$$

*

(b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

RÉPONSE:

Si on pioche une boule dans l'urne i $N_i \neq 0$ mais comme $X_i = 0$

$$N_i X_i = 0$$

Si on ne pioche aucune boule dans l'urne i $X_i = 1$ mais comme $N_i = 0$

$$N_i X_i = 0$$

Dans tous les cas

$$N_i X_i = 0$$

*

(c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

RÉPONSE:

$$P(N_i = 1 \cap X_i = 1) = 0$$

et

$$P(N_i = 1) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(X_i = 1) \neq 0$$

$$P(N_i = 1)P(X_i = 1) \neq P(N_i = 1 \cap X_i = 1)$$

$$X_i \text{ et } N_i \text{ ne sont pas indépendantes}$$

*

4. Écrire un programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

RÉPONSE:

```

n=input('choisir un entier')
X1=1 // l'urne est pleine
N1=0 // on a pas choisi de boule dans l'urne 1

for i= 1:n
    l=grand(1,1,'uin',1,n)
    if l==1 then
        N1=N1+1
    end
end

if N1<>0 then
X1=0
end

disp(N1,X1)
On peut aussi écrire
n=input('choisir un entier')
N1=sum(grand(1,n,'uin',1,n)==1)
X1=1-min(1,N1)

```

*

EXERCICE 2

EDHEC 2015

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer la dimension de l'image de f , puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

RÉPONSE:

On a

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5))$$

Or en lisant les colonnes de la matrice

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

$$f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5) = e_1 + e_5$$

donc

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5)$$

Les vecteurs $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_1 + e_5$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

$$\boxed{\text{Dim Im } f = 2}$$

On sait que $\text{Im } f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et comme $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ et $e_1 + e_5$ on constate que

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - (e_1 + e_5) \in \text{Im } f$$

La famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est constituée de deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires donc forme une famille libre de $\text{Im } f$ qui est de dimension 2. C'est donc une base de $\text{Im } f$

$$\boxed{(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5) \text{ est une base de Im}(f)}$$

*

(b) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$, puis donner une base de $\text{Ker}(f)$.

RÉPONSE:

D'après le théorème du rang

$$\text{Dim Im } f + \text{Dim Ker } f = \text{Dim } (\mathbb{R}^5)$$

$$\boxed{\text{Dim Ker } f = 3}$$

Soit $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5$

$$(x, y, z, t, u) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x, y, z, t, u) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t + u = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x + y + z + t + u = 0 \end{cases}$$

*

2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

(a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v .

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
 f(u) &= f(e_2 + e_3 + e_4) \\
 &= f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\
 &= 3f(e_2) = 3(e_1 + e_5) \\
 f(v) &= f(e_1 + e_5) \\
 &= f(e_1) + f(e_5) \\
 &= (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) + e_1 + e_5 \\
 &= 2(e_1 + e_5) + e_2 + e_3 + e_4
 \end{aligned}$$

$f(u) = 3(e_1 + e_5) \text{ et } f(v) = 2(e_1 + e_5) + e_2 + e_3 + e_4$

$$\begin{aligned}
 f(u - v) &= f(u) - f(v) \\
 &= 3(e_1 + e_5) - (2(e_1 + e_5) + e_2 + e_3 + e_4) \\
 &= e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 \\
 &= -(u - v) \\
 f(u + 3v) &= f(u) + 3f(v) \\
 &= 3(e_1 + e_5) + 3(2(e_1 + e_5) + e_2 + e_3 + e_4) \\
 &= 9(e_1 + e_5) + 3(e_2 + e_3 + e_4) \\
 &= 3(u + 3v)
 \end{aligned}$$

$f(u - v) = -(u - v) \text{ et } f(u + 3v) = 3(u + 3v)$

*

(b) Montrer que $\mathcal{B}' = (u - v, u + 3v, e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_2 - e_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

RÉPONSE:

Soit x, y, z, t et o des réels tels que

$$x(u - v) + y(u + 3v) + z(e_2 - e_3) + t(e_2 - e_4) + o(e_2 - e_5) = 0_{\mathbb{R}^5}$$

alors

$$x(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5) + y((3e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 3e_5)) + z(e_2 - e_3) + t(e_2 - e_4) + o(e_2 - e_5) = 0_{\mathbb{R}^5}$$

i.e.

$$(-x + 3y)e_1 + (x + y + z + t + o)e_2 + (x + y - z)e_3 + (x + y - t)e_4 + (-x + 3y - o)e_5 = 0_{\mathbb{R}^5}$$

donc comme $(e_1, \dots, e_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$, on résout.

$$\begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y + z + t + o & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ x + y - t & = 0 \\ -x + 3y - o & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y + z + t + o & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ x + y - t & = 0 \\ -o & = 0 \end{cases} \quad L_5 \leftarrow L_5 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y + z + t & = 0 \\ -2z - t & = 0 \\ -z - 2t & = 0 \\ -o & = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y + z + t & = 0 \\ z & = 0 \\ t & = 0 \\ -o & = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y + z + t & = 0 \\ z & = 0 \\ t & = 0 \\ -o & = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 + \text{autres opérations}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y & = 0 \\ x + y & = 0 \\ z & = 0 \\ t & = 0 \\ -o & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \\ t & = 0 \\ -o & = 0 \end{cases} \quad 10$$

Ce qui montre que $x = y = z = t = o = 0$ et donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre comme de plus $\dim R^5 = 5$

$$\mathcal{B}' = (u - v, u + 3v, e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_2 - e_5) \text{ est une base de } \mathbb{R}^5.$$

*

(c) Écrire la matrice de f dans cette base. On note D cette matrice.

RÉPONSE:

D'après les calculs qui précèdent

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*

(d) Écrire une matrice R de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ inversible telle que $C = RDR^{-1}$.

RÉPONSE:

D'après la formule de changement de base la matrice attendue est

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*

3. (a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.

RÉPONSE:

Par le calcul

$$D(D + I)(D - 3I) = 0$$

*

- (b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C .

RÉPONSE:

D'après la question précédente, en développant

$$D^3 - 2D^2 - 3D = 0$$

On a

$$\begin{aligned} P(C) &= C^3 - 2C^2 - 3C \\ &= (RDR^{-1})^3 - 2(RDR^{-1})^2 - 3(RDR^{-1}) = 0 \\ &= RD^3R^{-1} - 2RD^2R^{-1} - 3RDR^{-1} \\ &= R(D^3 - 2D^2 - 3D)R^{-1} \\ &= R0R^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X \text{ est un polynôme annulateur de } C.$$

*

4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n , b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$

- (a) En utilisant les racines de P , déterminer les valeurs de a_n , b_n et c_n en fonction de n .

RÉPONSE:

en refactorisant

$$X^n = (X(X + 1)(X - 3)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$

En remplaçant successivement X par -1 , 3 et 0

$$\begin{aligned} (-1)^n &= 0Q_n(-1) + a_n(-1)^2 + b_n(-1) + c_n \\ (3)^n &= 0Q_n(3) + a_n(3)^2 + b_n(3) + c_n \\ (0)^n &= 0Q_n(0) + a_n(0)^2 + b_n(0) + c_n \end{aligned}$$

Et nous devons donc résoudre le système

$$\begin{aligned} \begin{cases} (-1)^n &= a_n - b_n + c_n \\ (3)^n &= 9a_n + 3b_n + c_n \\ 0 &= c_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^n &= a_n - b_n \\ (3)^n &= 9a_n + 3b_n \\ 0 &= c_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^n &= a_n - b_n \\ (3)^n + 3(-1)^n &= 12a_n & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ 0 &= c_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b_n &= a_n - (-1)^n \\ \frac{(3)^n + 3(-1)^n}{12} &= a_n \\ 0 &= c_n \end{cases} \end{aligned}$$

Pour n entier naturel $a_n = \frac{(3)^n + 3(-1)^n}{12}$, $b_n = \frac{(3)^n + 3(-1)^n}{12} - (-1)^n$ et $c_n = 0$

*

- (b) Dédurre de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2 .

RÉPONSE:

Da'près ce qui précède

$$C^n = P(C)Q_n(C) + a_n C^2 + b_n C + c_n C^0$$

or P est un polynôme annulateur de C

$$C^n = 0 + a_n C^2 + b_n C +$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $C^n = \frac{(3)^n + 3(-1)^n}{12} C^2 + \left(\frac{(3)^n + 3(-1)^n}{12} - (-1)^n \right) C$

*

5. Compléter, à l'aide de matrices de type zeros et ones, les deux espaces laissés libres dans la commande Scilab suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C .

`C = [ones(1,5) ; ----- , ----- ; ones(1,5)]`

RÉPONSE:

$C = [\text{ones}(1, 5); [1, \text{zeros}(1, 4)]; [1, \text{zeros}(1, 4)]; [1, \text{zeros}(1, 4)]; \text{ones}(1, 5)]$

*

EXERCICE 3

Ecricom 2017

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

RÉPONSE:

On trouve

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A - I)^3 = 0$$

*

2. La matrice A est-elle inversible ?

RÉPONSE:

La matrice A est inversible (calculs à faire)

*

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1; 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1; 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

RÉPONSE:

La fonction $x \mapsto x+1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1; 1[$ et sur cet intervalle elle prend des valeurs sur $]0; 1[$.
La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ (on a exclu 0) donc par composition

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1; 1[$

On a pour $x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ \varphi''(x) &= -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi''(0) = -\frac{1}{4}$$

*

4. Citer la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, et **calculer** un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

RÉPONSE:

La fonction étant de classe $\mathcal{C}^2$ on peut appliquer la formule de Taylor Young et donc

$$\sqrt{1+x} = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Et donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

*

5. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}(P(x))^2 &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 \\&= 1^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}x^2\right)^2 + 2 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}x\right) + 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{8}x^2\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2}x\right) \left(-\frac{1}{8}x^2\right) \\&= 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \\&= 1 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4\end{aligned}$$

$$P(x)^2 = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$$

*

6. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

RÉPONSE:

On constate que $C^3 = 0$, donc $C^3 = C^4 = 0$.

On a

$$(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = (P(C))^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 - \frac{1}{4}C^2 - \frac{1}{8}C^3 = I + C = A$$

$$(P(C))^2 = A$$

*

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A .

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soient u , v et w les vecteurs définis par :

$$\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$$

(a) Calculer les vecteurs v et u .

RÉPONSE:

La matrice de l'application $f - Id$ dans la base canonique est $A - I$ que l'on a calculer précédemment. On a aussi $u = (f - Id) \circ (f - Id)(w)$ Pour calculer ces vecteurs on utilise la matrice $A - I$ et $(A - I)^2$

$$(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur v a pour coordonnées dans la base canonique $(1, 1, -3)$

$$(A - I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur u a pour coordonnées dans la base canonique $(-6, -6, 0)$

□

*

(b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

Soit α , β et γ trois réels

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\Leftrightarrow \dots \text{Afinir} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est libre. Comme de plus $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

(u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

*

(c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

RÉPONSE:

D'après la définition des trois vecteurs (u, v, w) on sait que

$$f(v) = u + v \quad f(w) = v + w$$

Ce qui nous donne les deux dernières colonnes de la matrice Puis en utilisant On a aussi $(A - I)^3 = 0$ donc

$$(f - Id) \circ (f - Id) \circ (f - Id)(w) = 0$$

ce qui donne

$$(f - Id) \circ (f - Id)(v) = 0$$

puis

$$(f - Id)(u) = 0$$

donc

$$f(u) = u$$

Ce qui permet de remplir la première colonne

La matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est T

*

(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

RÉPONSE:

Cette matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$. On la construit en mettant dans les colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ décomposés dans la base canonique.

□

*

8. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.

RÉPONSE:

On suppose que $N^2 = T$ alors

$$NT = NN^2 = N^3$$

et

$$TN = N^2N = N^3$$

donc

$$\boxed{\text{Si } N^2 = T, \text{ alors } NT = TN}$$

On suppose que $N^2 = T$ alors on sait que $NT = TN$. Cherchons N sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Alors $NT = TN$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$$

Cette égalité entre deux matrices nous donne le système a neufs équations et neuf inconnues

$$\begin{cases} a+d = a \\ b+e = a+b \\ c+f = b+c \\ d+g = d \\ e+h = d+e \\ f+i = e+f \\ g = g \\ h = g+h \\ i = h+i \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} d = 0 \\ e = a \\ f = b \\ g = 0 \\ h = d \\ i = e \\ g = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ e = a \\ f = b \\ g = 0 \\ h = 0 \\ i = a \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } N^2 = T, \text{ alors } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

*

(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2 .

RÉPONSE:

On peut donc chercher les solutions sous la forme $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ L'équation $N^2 = T$ est équivalente

à

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a^2 & = 1 \\ 2ab & = 1 \\ 2ac + b^2 & = 0 \end{cases}$$

Il y a donc deux solutions pour $a = \pm 1$

Avec $a = 1$ On a une solution

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et avec $a = -1$ on trouve une autre solution

$$N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux solutions sont $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

*

9. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2 .

RÉPONSE:

Soit M une matrice carrée d'ordre 3

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP = T \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2 && \text{Résolution précédente} \\ &\Leftrightarrow M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$

Les deux solutions sont PN_1P^{-1}, PN_2P^{-1} .

Remarque : Programme

```

A=[0,1,2;-1,2,2;-3,3,1]
I=diag([1,1,1])

M=I+0.5*(A-I)-1/8*(A-I)^2
disp(M, 'une solution partie B')
disp(M^2, 'verification')

P=[-6,1,1;-6,1,0;0,-3,1]
Pi=inv(P)

N1=[1,1/2,-1/8;0,1,1/2;0,0,1]
N2=[-1,-1/2,1/8;0,-1,-1/2;0,0,-1]
```

```

disp(N1^2, 'calcul du carre de N1')
disp(N2^2, 'calcul du carre de N2')

M1=P*N1*Pi
M2=P*N2*Pi

disp(M1," premiere solution  M1")
disp(M2," deuxieme solution  M2")

```

Le résultat affiché est

une solution partie B

```

1.25  -0.25  1.
0.25   0.75  1.
-1.5   1.5   1.

```

verification

```

0.   1.   2.
-1.  2.   2.
-3.  3.   1.

```

calcul du carre de N1

```

1.   1.   0.
0.   1.   1.
0.   0.   1.

```

calcul du carre de N2

```

1.   1.   0.
0.   1.   1.
0.   0.   1.

```

premiere solution M1

```

1.25  -0.25  1.
0.25   0.75  1.
-1.5   1.5   1.

```

deuxieme solution M2

```

-1.25  0.25  -1.
-0.25  -0.75 -1.
1.5    -1.5  -1.

```

Donc on retrouve bien que PN_1P^{-1} est la solution trouvé dans la partie B!

*

10. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel?
RÉPONSE:

Ce n'est pas un espace vectoriel car la matrice nulle n'est pas solution de cette équation.

*

EXERCICE 4

EDHEC 2013

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 1$

RÉPONSE:

- **Initialisation** On a bien $0 \leq u_0 \leq 1$ par définition car $u_0 = 0$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$$0 \leq u_n \leq 1$$

alors par croissance de la fonction carrée sur $[0; 1]$

$$0 \leq u_n^2 \leq 1^2$$

et donc

$$\frac{1}{2} \leq u_n^2 \leq \frac{1+1}{2}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$

*

- (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n \\&= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} \\&= \frac{(u_n - 1)^2}{2}\end{aligned}$$

Comme un carré est positif on a donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

*

.

(c) Dédurre des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

RÉPONSE:

La suite est croissante et majorée par 1 elle converge donc vers une limite que nous notons ℓ . De plus la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2 + 1}{2} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Da'près le théorème du point fixe

$$f(\ell) = \ell$$

Cette équation

$$\begin{aligned}f(\ell) = \ell &\Leftrightarrow \frac{\ell^2 + 1}{2} = \ell \\&\Leftrightarrow \ell^2 + 1 = 2\ell \\&\Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \\&\Leftrightarrow \ell - 1 = 0\end{aligned}$$

La suite converge vers 1

*

2. (a) Écrire, en scilab, une fonction d'entête `function u=suite(n)` qui renvoie la valeur de u_n .
RÉPONSE:

```
function u=suite(n)
    u=0
    for i = 1:n
        u=(u^2+1)/2
    end
endfunction
```

*

(b) En utilisant la fonction précédente écrire un programme en scilab qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

RÉPONSE:

```
n=0
u=suite(0)
while 1-u>10^(-3):
    n=n+1
    u=suite(n)
end
print(n)
```

*

3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$.

(a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .

RÉPONSE:

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 v_k - v_{k+1} &= v_k - (1 - u_{k+1}) \\
 &= v_k - \left(1 - \frac{u_k^2 + 1}{2}\right) \\
 &= 1 - u_k - \left(1 - \frac{u_k^2 + 1}{2}\right) \\
 &= -u_k + \frac{u_k^2 + 1}{2} \\
 &= \frac{1 - 2u_k + u_k^2}{2} \\
 &= \frac{(1 - u_k)^2}{2} \\
 &= \frac{v_k^2}{2}
 \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^2}{2}$

*

(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$

RÉPONSE:

C'est un télescopage que je vous conseille de rédiger en entier Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^n v_k && \text{changement d'indice} \\
 &= v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_k - v_n \\
 &= v_0 - v_n
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$

*

(c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$

RÉPONSE:

Comme $\lim u_n = 1$ on obtient $\lim v_n = 0$ et donc d'après la question précédente la série de terme général $v_k - v_{k+1}$ converge vers $v_0 = 1 - u_0 = 1$. Or on sait que pour $k \in \mathbb{N}$ $v_k^2 = 2(v_k - v_{k+1})$ (question 3a) donc

La série de terme général v_n^2 converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2$

*