french

/home/matthieu/Travail/ECE2/logoCIV.jpg

LIV–ECE2

Devoir surveillé de mathématiques
type HEC
Samedi 30 Novembre

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont inviter à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve , un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE HEC 2016

Cet exercice a été modifié

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^{\mathrm{t}}M$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que ${}^{\mathrm{t}}(MN) = {}^{\mathrm{t}}N{}^{\mathrm{t}}M$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
   On pose : $A = X{}^{\mathrm{t}}X$ et $\alpha = {}^{\mathrm{t}}XX$.
   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$.
   (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$.
   Déterminer $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$; donner une base de Im f et préciser la dimension de Ker f.
   (c) Calculer la matrice AX.
   (d) *Pour les cubes* : Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
   Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker}g$.
   (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

(c) En déduire que la matrice ${}^{t}VV$ est inversible.

$\boxed{\text{PROBLÈME HEC 2005.}}$

L'exercice coomptait pour 25% du total

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne blanche contenant n boules blanches numérotées de 1 à n et une urne noire contenant n boules noires numérotées de 1 à n, dans lesquelles on effectue des suites de tirages. À chaque tirage, on tire simultanément et au hasard une boule de chaque urne. On obtient ainsi à chaque tirage, deux boules, une blanche et une noire.
On dira qu'on a obtenu une paire lors d'un tirage, si la boule blanche et la boule noire tirées portent le même numéro.

Partie I. Tirages avec remise

1. Dans cette question, on effectue les tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois une paire.
   (a) Préciser l'espace probabilisé (Ω, A, P) qui modélise cette expérience.
   (b) On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) effectués.
   Déterminer la loi de Y ; donner son espérance et sa variance.
2. Écrire en scilab une fonction dont l'en-tête est `function r=pgrml (n)` qui modélise l'expérience précédente.
3. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On effectue des tirages avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois la boule blanche numérotée 1. On note U la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, et Z la variable aléatoire égale au nombre de paires obtenues à l'issue de ces tirages.
   (a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(U = k)$.
   En déduire la probabilité que l'on n'obtienne jamais la boule blanche numéro 1.

   Reconnaître la loi de U.
   (b) Déterminer la loi conjointe du couple (U, Z).
   (c) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$,
   $$P(Z = k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ell}$$
   (d) Calculer $P(Z = 1)$.
   Montrer que $P(Z = 0) = \dfrac{1}{3}$
   (e) En utilisant la formule dite du triangle de Pascal et le résultat de la question c) pour $k = i + 1$, justifier, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :
   $P(Z = i + 1) = \dfrac{1}{4} P(Z = i + 1) + \dfrac{1}{4} P(Z = i)$
   (f) En déduire la loi de Z.

Partie II. Tirages sans remise.

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans les deux urnes, jusqu'à ce que les urnes soient vides. On note X_n le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

A. Étude de cas particuliers.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   Combien y a-t-il de résultats possibles ? Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
   On précisera pour chaque valeur prise par X_2, l'ensemble des événements élémentaires permettant de l'obtenir.
   En déduire la loi de X_2.

B. Étude du cas général.

On se place dans le cas où n est un entier naturel non nul.

1. (a) Décrire l'univers Ω des événements observables.
   (b) Déterminer le nombre total de suites de tirages possibles.
   (c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

Pour tout entier naturel k, on note $a(n,k)$ le cardinal de $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = k\}$.
Par convention, $a(0,0) = 1$.

2. (a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{j=0}^{n} a(n,j)$
   (b) Déterminer $a(n,n)$ et $a(n,n-1)$.
3. (a) Justifier, pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant n$, l'égalité suivante :

$$\frac{a(n,j)}{n!} = \binom{n}{j} \frac{a(n-j,0)}{(n-j)!}$$

   En déduire la relation :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{a(j,0)}{j!} = n!$$

   Donner l'expression de $a(n,0)$ en fonction des nombres $(a(j,0))_{0 \leqslant j \leqslant n-1}$

   (b) Soit k un entier compris entre 1 et n et i un entier compris entre 0 et $k-1$.
   Justifier l'égalité :

$$\binom{j}{i}\binom{k}{j} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{j-i}$$

   , puis montrer que

$$\sum_{j=i}^{k} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j} = 0$$

   En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{j=i}^{k-1} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{k}{j}$$

4. (a) Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
   On suppose que, pour tout entier j compris entre 0 et $k-1$, on a les k égalités :
$$a(j,0) = j! \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\, i!$$
   Montrer l'égalité :
$$a(k,0) = k! \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i}\, i!$$
   (On pourra utiliser l'expression, pour $n = k$, de $a(n,0)$ trouvée dans la question **3.a)**
   (b) En déduire, pour tout entier naturel non nul k, la valeur de $a(k,0)$.
   (c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n et exprimer la loi de X_n à l'aide d'une somme.

Partie III. Tirages mixtes

Dans cette partie, les tirages se font sans remise dans l'urne blanche et avec remise dans l'urne noire, jusqu'à ce que l'urne blanche soit vide. On note X_n, le nombre de paires obtenues à l'issue des n tirages.

1. (a) Montrer que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de X_n.
2. On désire simuler cette expérience en utilisant Scilab. On suppose que n est une constante fixée.
   (a) On commence par écrire une fonction `echange(tab,i,j)` qui recoit en argument un tableau `tab` et qui échange les éléments en place `i` et `j`, laisse tous les autrees éléments inchangés et renvoie le tableau ainsi modifié scilab function tabresultat=echange(tab,i,j) inter=...... tab(i)=......... .....= tabresultat=t endfunction
   (b) Puis on se sert de la fonction précédente pour créer un tableau `blancs` donnant la liste des résultats obtenus en tirant sans remise les billes dans l'urne blanche. On propose le programme suivant
   scilab n=10 blancs= [1 :1 :n]
   for i =1 :n-1 do j=grand(1,1,'uin',i,n) blancs=echange(blancs,i,j) end
   print(blancs) Expliquer le fonctionnement de ce programme et son résultat. On précisera ce qui se passe au premier passage puis au i-ème passage dans la boucle `for`, et en particulier on justifiera les arguments de la fonction `grand`.
   (c) Écrire une ligne en Scilab permettant d'initialiser un tableau `noirs` qui contient les n numéros obtenus lors des tirages avec remise dans l'urne noire ?
   (d) Écrire une ligne Scilab qui en utilisant les tableaux `noirs` et `blancs` précédemment définis permet de calculer la valeur de X_n.