

Devoir surveillé de mathématiques
Sujet Composite
Samedi 11 Janvier

EXERCICE 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f .
(c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f .
(d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
(a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .

(b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On pose : $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M .

- (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
- (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
- (c) En déduire que M est inversible.
- (d) À l'aide de la question 1) a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I , M et M^2 .
- (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n , en fonction des matrices I , A et A^2 .
Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V .

1. Montrer que $V T = T V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = a e'_1$.
- (b) Montrer que $g(e'_2) - a e'_2$ appartient aussi au noyau de f .
En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = b e'_1 + a e'_2$.
- (c) Montrer que : $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = a e'_2 + b e'_1$.
En déduire que $g(e'_3) - a e'_3 - b e'_2$ appartient au noyau de f .
- (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que :
$$V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c , puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $P(A) = \frac{13}{27}$.
2. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G .
3. Calculer l'espérance de G . Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. (a) On note $Z = \frac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
 (b) Démontrer que : $E(Y) = 2P(A) - 1$.
2. (a) Donner la loi de X .
 (b) En déduire que l'on a également : $E(Y) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,
 puis que : $E(Y) = (1-2p)^n$.
3. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p .
4. Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU } \ll n \text{ est pair} \gg \right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y . En déduire que : $E(G) = 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k P(X = k)$.
2. Démontrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
3. Montrer que : $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$
4. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

5. (a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.
 (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité?

EXERCICE 3

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

- 1)
 - a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .
 - b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
- 2)
 - a) Montrer que f est impaire.
 - b) Etudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
- 3)
 - a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

- b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

- 4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
 - a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est une intégrale convergente.
 - b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$.
 - c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x \ln(x)$$
 - d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

- 5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

- a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.
On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f , c'est à dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

- b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
 - c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$)

- 6) On rappelle qu'en Scilab, la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` simule une variable aléatoire uniforme sur $[a; b]$. Compléter le script Scilab suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$:

```
U=grand (1,100 000, 'unf', 0, 1)
V=log (1+U.^2)
f=-----
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

- 7) a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
 b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f .
- 8) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

- 9) a) Etablir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$$

- b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?

- 10) a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}$$

- b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$.

- c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

- d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt$$

- e) Modifier le script présenté à la question 6) pour donner une valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$