

Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes et des matrices.

ECE 2 Lycée international de Valbonne



25 novembre 2019

Table des matières

I Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice	4
I.1 Définitions	4
I.2 Propriétés	5
I.3 Matrices diagonalisables	7
II Transcription pour un endomorphisme	8

Rappels

Définition 1 (Matrices semblables).

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}BP$$

Proposition 1 (Propriétés d'une matrice diagonale).

Soit D une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

- **Puissances** : Soit k un entier naturel alors

$$D^k =$$

- **Inverse** : D est inversible si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls et alors

$$D^{-1} =$$

Proposition 2 (Caractérisation plus rapide d'une matrice inversible).

Soit A une matrice **carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes

1. A est inversible.

2.

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad AX = 0 \Rightarrow$$

3. le système **homogène** associé admet pour unique solution $(0, 0, \dots, 0)$

4. L'endomorphisme associé est .

Proposition 3.

Inversibilité d'une matrice 2×2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

Démonstration :

5

Proposition 4 (Non inversibilité de certaines matrices).

Si la matrice A possède deux lignes ou deux colonnes identiques, ou si elle possède une ligne ou une colonne nulle, on peut dire que la matrice n'est pas inversible.

Proposition 5.

Produit de matrice par colonnes Soit A une matrice et B une matrice telle que AB existe. On note $B_1, B_2, \dots, B_n$ les colonnes de B . Alors la colonne i de AB est obtenue en calculant AB_i

Exercice 1.

réaliser les produits suivants $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2.

Étudier $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Que peut on dire lorsque l'on multiplie une matrice A à **droite** par une matrice diagonale?

I Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Dans toute cette partie on s'intéresse à des matrices carrées à coefficient réels.

I.1 Définitions

Définition 2 (Valeur propre).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on dit que λ est **une valeur propre de** A si et seulement si il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ NON NUL tel que

$$AX = \lambda X$$



Attention : Si on oublie NON NUL tout réel devient valeur propre.

Remarque : Cela revient à vérifier l'existence d'une solution NON NULLE dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour l'équation

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

et en en déduit

Méthode 1 pour trouver les valeurs propres d'une matrice

λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Un cas particulier de la méthode précédente : $\lambda = 0$.

Méthode : Matrice non inversible et valeur propre 0

Une matrice admet 0 pour valeur propre si et seulement si cette matrice n'est pas inversible si et seulement si son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

Définition 3 (Spectre).

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est nommé le spectre et est noté $Sp(A)$.

Proposition 6 (Matrices triangulaires).

Soit T une matrice triangulaire. Alors les valeurs propres de T sont exactement les coefficients diagonaux.

Définition 4 (Vecteurs propres et sous-espaces propres).

Soit A une matrice et λ une valeur propre de A

- $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un **vecteur propre** associé à λ si et seulement si C est NON NUL et

$$AC = \lambda C$$

- Le **sous espace propre** associé à λ est :

$$E_\lambda = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AC = \lambda C\} = \text{Ker} (\quad)$$

Méthode pour calculer les vecteurs propres

On résout l'équation $AC = \lambda C$ où λ est un paramètre et C l'inconnue .

I.2 Propriétés

Proposition 7 (Structure de E_λ).

Soit λ une valeur propre de la matrice A alors E_λ est un sous espace-vectoriel de .

Proposition 8 (Concaténation des familles de vecteurs propres).

Soit $C_1, C_2, \dots, C_p$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ . On suppose de plus que $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ forment

une famille libre.

Soit $D_1, D_2, \dots, D_r$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre μ . On suppose de plus que $(D_1, D_2, \dots, D_r)$ forment une famille libre.

Alors $(C_1, \dots, C_p, D_1, \dots, D_r)$ forment une famille libre.

Méthode : Liberté et vecteurs propres

Si $C_1, C_2, \dots, C_p$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes alors cette famille est libre.

Théorème 1 (liens avec les polynômes annulateurs).

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ et χ un polynôme annulateur de A (i.e. $\chi(A) = 0$).

Si λ est une valeur propre de A alors λ est forcément une racine de χ .



Attention : La réciproque est fausse.

Méthode 2 pour calculer les valeurs propres

On trouve un polynôme annulateur, et on cherche les racines de ce polynôme. Cela nous donne les valeurs propres **potentielles**. Il faut alors vérifier parmi ces racines lesquelles sont valeurs propres.

Exemple : On pose

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $K^2 + I = 0$, en déduire les valeurs propres potentielles de la matrice K .

I.3 Matrices diagonalisables

Définition 5 (matrice diagonalisable).

On dit qu'une matrice A est **diagonalisable** si et seulement si il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque : Diagonaliser une matrice A c'est trouver une matrice D diagonale semblable à A . C'est faire un changement de base vers une base de vecteurs propres

Remarque :

On peut écrire la relation $A = PDP^{-1}$ sous la forme

$$AP = PD$$

Si on note C_i la i ème colonne de P .

$$A(C_1 C_2 \dots C_n) = (C_1 C_2 \dots C_n)D$$

et on retrouve

$$AC_i = \lambda_i C_i$$

Méthode 1 pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

On trouve les valeurs propres et les sous espaces propres associés à chacune des valeurs propres et on constate que la somme de leur dimension est égale à la taille de la matrice. Cette méthode permet en pratique de calculer la matrice de passage et donc de diagonaliser la matrice A

Méthode 2 pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

Il suffit de constater qu'une matrice a autant de valeurs propres différentes que sa taille (cette méthode ne donne pas les vecteurs propres associées ni les valeurs propres).

Méthode cas classique de matrice non diagonalisable

Soit A une matrice n'ayant qu'une unique valeur propre λ . Alors la seule façon pour que la matrice A soit diagonalisable c'est que $A = \lambda I$, ce qui est la plupart du temps faux (sinon la question n'est pas intéressante!)

Théorème 2 (matrices symétriques).
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors elle est diagonalisable.

Méthode 3 pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

Il suffit de constater qu'une matrice est symétrique pour pouvoir affirmer qu'elle est diagonalisable (cette méthode ne donne ni les vecteurs propres ni les valeurs propres).

II Transcription pour un endomorphisme

Dans toute la suite u désigne un endomorphisme de E un espace vectoriel (de dimension finie).

Définition 6 (Valeurs propres).
*Soit λ un réel on dit que λ est une **valeur propre** de u si et seulement si il existe*

Méthode 1 pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme

λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif .

Un cas particulier de la méthode précédente : $\lambda = 0$.

Méthode :endomorphisme non injectif et valeur propre 0

Si on constate qu'un endomorphisme u admet 0 pour valeur propre alors u n'est pas injective .

Définition 7 (Spectre).
L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est nommé le

Définition 8 (Vecteurs propres et sous-espaces propres).
Soit u un endomorphisme et λ une valeur propre de u



- $\mathbf{x} \in \quad$ est un *vecteur propre* associé à λ si et seulement si $\mathbf{x}$ est $\quad$ et

- Le *sous espace propre* associé à λ est

$$E_\lambda = \{ \mathbf{x} \in \quad / \quad \} = \text{Ker}$$



Théorème 3 (liens avec les polynômes annulateurs).

Soit u un endomorphisme de E et χ un polynôme annulateur de u (i.e. $\chi(u) = 0$)

Si λ est une valeur propre de u alors λ est forcément $\quad$.



Attention : La réciproque est fausse.



Proposition 9 (Structure de E_λ).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Soit λ une valeur propre alors E_λ est un sous espace-vectoriel de $\quad$.



Proposition 10 (Concaténation de familles de vecteurs propres).

Soit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ . On suppose de plus que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$ forment une famille $\quad$.

Soit $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre μ On suppose de plus que $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ forment une famille $\quad$.



Alors $\quad$ forment une famille libre.

Définition 9 (Endomorphisme diagonalisable).

Diagonaliser un endomorphisme c'est trouver une base de vecteur propres.