

Couples de variables aléatoires discrètes : compléments

ECE 2 Lycée international de Valbonne



25 novembre 2019

Table des matières

I Méthodes et résultats à connaître sur les couples de VAD	2
I.1 Créer des vad	2
I.2 Méthode : calculer la loi d'un maximum ou d'un minimum	3
I.3 Méthode : Calculer la loi d'une somme	4
I.3.a Résultat : Stabilité de la loi binomiale pour la somme	4
I.3.b Résultat : Stabilité de la loi de Poisson pour la somme	5
II Indépendance et covariance	5
II.1 Indépendance et conséquence	5
II.2 Covariance	6
III Suites de variables aléatoires discrètes.	10
III.1 Exemples	10
III.2 Indépendance	10

Dans tout la suite les variables aléatoires discrètes sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

I Méthodes et résultats à connaître sur les couples de VAD

I.1 Créer des vad

Proposition 1.

Soit X et Y deux variables aléatoires. Soit f une fonction à valeurs réelles telle que $f(x, y)$ soit défini pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$.

Alors $f(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur Ω .

Exercice :

Dans chacun des cas suivants expliciter qu'elle la fonction f

- $\max(X, Y)$ est une vad on pose $f(., .) =$
- $\min(X, Y)$ est une vad on pose $f(., .) =$
- $X + Y$
- XY

Théorème 1 (Rappel : théorème de transfert).

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes et $g(x, y)$ une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Alors

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

sous réserve que cette dernière série converge absolument.



I.2 Méthode : calculer la loi d'un maximum ou d'un minimum

Méthode loi d'un maximum

Soit X et Y deux variables aléatoires pour calculer la loi de $\max(X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\max(X, Y) \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(\max(X, Y) \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k)$$

Ce qui permet de calculer la fonction de répartition. Puis on utilise, pour les entiers k adaptés :

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$$

Méthode loi d'un minimum

Soit X et Y deux variables aléatoires pour calculer la loi de $\min(X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\min(X, Y) > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) > k) = \mathbb{P}(X > k) \mathbb{P}(Y > k)$$

Et en utilisant $\mathbb{P}(\square \leq k) = 1 - \mathbb{P}(\square > k)$ permet de trouver un lien entre fonction de répartition de X, Y et celle du minimum.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer la loi du maximum et du minimum de X et Y

I.3 Méthode : Calculer la loi d'une somme

Méthode loi d'une somme

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour calculer la loi de $X + Y$ on peut remarquer que pour tout entier naturel

$$[X + Y = n] = \bigcup_{k=0}^n [X = k] \cap [Y = n - k] = \bigcup_{k=0}^n [X = n - k] \cap [Y = k] = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n \\ i+j=n}} [X = i] \cap [Y = j]$$

Et ces événements sont incompatibles deux-à-deux.

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)$$



Attention : Il faut adapter les indices des $\sum$ précédentes au support de X et Y

I.3.a Résultat : Stabilité de la loi binomiale pour la somme

lemme 1 (Égalité de Vandermonde).

Soit m, n et k trois entiers naturels alors

$$\sum_{j=0}^k \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

Démonstration :

- Méthode 1 : En développant à l'aide du binôme de Newton $(1+x)^{n+m} = (1+x)^m(1+x)^n$
- Méthode 2 : En dénombrant le nombre de façon de tirer k billes simultanément dans une urne contenant n billes noires et m billes mordorées.

Théorème 2 (Somme de deux lois binomiales « avec le même p »).

Soit n_1 et n_2 deux entiers naturels et $p \in]0; 1[$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

Démonstration :

À savoir faire



I.3.b Résultat : Stabilité de la loi de Poisson pour la somme

Théorème 3 (Somme de deux lois de Poisson).

Soit λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

II Indépendance et covariance

II.1 Indépendance et conséquence

Définition 1 (Rappel : indépendance de deux variables aléatoires discrètes).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

Proposition 2 (Rappel espérance d'une somme : linéarité de l'espérance).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes¹ admettant une espérance alors $X + Y$ admet une espérance et

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Plus généralement si α et β sont des réels $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

1. non nécessairement indépendantes

Démonstration :
À savoir faire

5

Proposition 3 (Espérance d'un produit).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** admettant une espérance telle que XY admet une espérance alors

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$



Attention : Quelle sont les différences entre les hypothèses de ces deux théorèmes?

Démonstration :

5

II.2 Covariance

Définition 2 (Covariance).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On note alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	1	2	3	loi de X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
loi de Y	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

(exemple1)

Nous allons calculer directement la covariance

Proposition 4 (Propriétés de la covariance).

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Soit α et β deux réels.

1. Symétrie : $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.
2. La variance comme covariance $\text{Cov}(X, X) = V(X)$
3. Linéarité à droite $\text{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \dots$
4. Linéarité à gauche $\text{Cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \dots$
5. Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en bilinéarité

Proposition 5 (Variable presque certaine).

Soit c une constante (ou une variable aléatoire presque certaine égale à c).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$\text{Cov}(X, c) = 0$$

$$\text{Cov}(X + c, Y) = \text{Cov}(X, Y)$$

Théorème 4 (Formule de Huygens).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration :

§

Proposition 6 (Lien entre covariance et indépendance).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$



Attention : La réciproque est fausse!!

Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	-1	1	loi de X
0	$1/2$	$1/2$	
1	$1/2$	$1/2$	
loi de Y			1

(exemple2)

Calculons la covariance de (X, Y)

Proposition 7 (Variance d'une somme).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Soit α et β deux réels

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta \text{Cov}(X, Y)$$

Proposition 8 (Variance d'une somme de deux v.a.d. indépendantes).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On suppose que X et Y sont indépendantes

Alors

$$V(X + Y) =$$

Définition 3 (Coefficient de corrélation linéaire).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et un écart-type non nul.

On définit le coefficient de corrélation linéaire

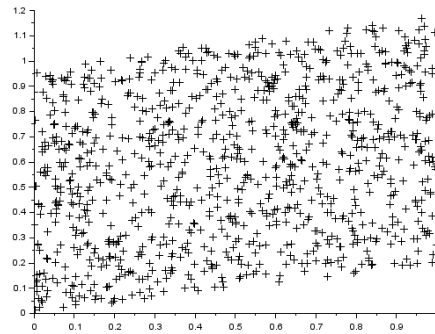
$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Où σ_X et σ_Y sont les écarts types de X et Y .

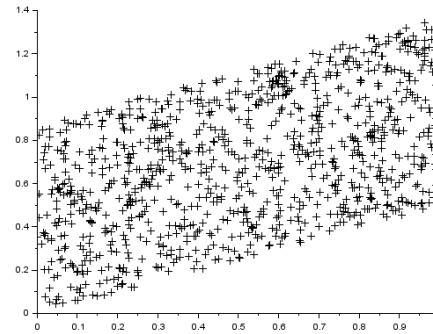



```
// lois uniformes sur [0,1], indépendantes
x1=grand(1000,1,'unf',0,1)
y1=grand(1000,1,'unf',0,1)

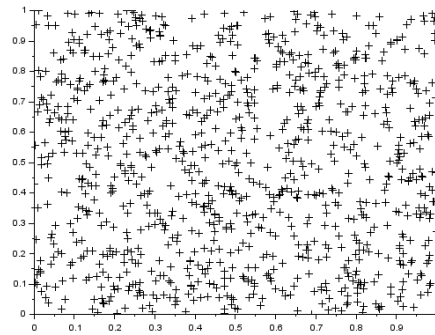
// avec un coefficients de corrélation fixé
a=input('coefficient de corrélation voulu')
z1=a*x1+sqrt(1-a^2)*y1
plot2d(x1,z1,-1)
rho=corr(x1,z1,1)/stdev(x1)/stdev(z1)
disp(rho)
```



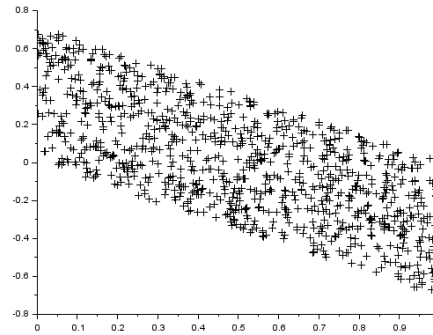
$\rho = 0,2$



$\rho = 0,5$



$\rho = 0$



$\rho = -0,7$

Proposition 9 (Cauchy-Schwarz).

Soit X et Y deux variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 alors

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

De plus il y' a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si il existe a et b deux constantes telles que

$$X = aY + b \quad \text{ou} \quad Y = aX + b$$

III Suites de variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie toutes les variables aléatoires sont discrètes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

III.1 Exemples

III.2 Indépendance

Définition 4 (indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes).

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires.

On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega), \forall \quad \mathbb{P} \left(\bigcap [X_i = x_i] \right) =$$

Définition 5 (Indépendance mutuelle d'une suite infinie de variables aléatoires discrètes).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si pour tout partie $I \subset \mathbb{N}$ finie les variables $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes au sens précédent.

Proposition 10 (Lemme des coalitions).

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)$ n variables aléatoires discrètes.

Alors toute fonction des v.a. $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute fonction de $X_{p+1}, \dots, X_n$

Exemple : Si X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes alors X_1 est indépendante de $\max(X_2, X_3)$

Définition 6 (Espérance et variance d'une somme).

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires. Alors

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$

Si de plus ces variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes**

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$