

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES.

Définitions

Exercice 1.

Déterminer si c'est possible la valeur de la constante a pour que les fonctions suivantes soient des densités. Dans ce cas là calculer leur fonction de répartition.

Dans les cas où une valeur a convient, calculer les probabilités $P(X \leq 0)$, $P(X \geq 0)$ et $P(0 \leq X \leq 1)$

$$1. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ate^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} \frac{a}{t} & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ at^2e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$4. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ae^{-2t}(1 - e^{-2t})^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$5. f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ae^{-t} \ln(1 + e^t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{On pourra poser } u(t) = e^t \text{ et faire un changement de variable.}$$

$$6. f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } 1 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition. Si oui calculer une densité associée.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Transfert, opérations, min max...

Exercice 3.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(-1; 1]$ On note $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle et on note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y .

1. Écrire une fonction SCILAB `function y=exo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `grand`.
2. Montrer que le support de Y est $[0; 1[$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $F_Y(x) = 0$.
4. Soit $x > 0$ montrer que

$$[Y \leq x] = [-x \leq X \leq x]$$

5. En déduire $F_Y(x)$ quand $x > 0$.
6. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y .

Exercice 4.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(-1; 2]$ On note $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle et on note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y .

1. Écrire une fonction SCILAB `function y=exo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `grand`.
2. Calculer le support de Y .
3. Calculer la fonction de répartition de Y . On distinguera 4 cas $x < 0$, $0 \leq x < 1$, $1 \leq x < 2$ et $x \geq 2$.
4. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y .

Exercice 5.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; n+1[$ où n est un entier naturel non nul. On note $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière. On admet que Y est une variable aléatoire réelle.

1. Écrire une fonction SCILAB `function y=exo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `grand`
2. Rappeler la définition de la partie entière.
3. Donner le support de Y .
4. Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$[Y = k] = [k \leq X < k + 1]$$

5. En utilisant la fonction de répartition de X en déduire $P(Y = k)$.

Exercice 6.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On admet dans les questions suivantes que les objets manipulés sont bien des variables aléatoires réelles

1. On pose $Y = \sqrt{X}$. Quel est le support de Y .
2. Comment simuler cette variable aléatoire en SCILAB.
3. Calculer la fonction de répartition de Y . On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geq 0$
4. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y .
5. On pose $Z = X^2$, reprendre les questions précédentes avec Z .

Exercice 7.

Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est F .

On suppose que F est strictement croissante et on note $Y = F(X)$ on admet que F est une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble que l'on déterminera. On note F^{-1} la bijection réciproque de F .
2. On note G la fonction de répartition de Y . Montrer que pour $x < 0$ $G(x) = 0$ et que pour $x > 1$ on a $G(x) = 1$.
3. Montrer que pour $x \in [0; 1]$ on a $G(x) = x$.
4. Reconnaître la loi de Y .

Exercice 8 (EML 1996).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé (unité 5cm).
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.

(a) Déterminer la fonction de répartition F de X .

(b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X .

(c) On pose $Y = |X|$.

Déterminer la fonction de répartition G de Y . Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y .

Exercice 9 (EDHEC 2002).

Pour tout nombre réel x , on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, Y est donc la partie entière de X et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leq X < k + 1]$$

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
(b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
(c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
(d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .
2. On pose $Z = X - Y$.

(a) Déterminer $Z(\Omega)$.

(b) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0; 1[\quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

(c) En déduire une densité f de Z .

(d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z . Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 10 (Transfert affine).

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f . On pose $Y = 3X + 4$.

Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y

Moments

Exercice 11 (Parité et espérance).

Remarque : vous pouvez utiliser les résultats de cet exercice en faisant bien attention à la convergence.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.. On suppose que f est paire.

1. Montrer que $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_0^{\infty} f(t) dt$ converge. (changement de variable)
2. En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et que dans ce cas là

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Dans la suite on suppose avoir montré que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\int x f(x) dx$ est absolument convergente et que dans ce cas là $E(X) = 0$.
4. Que peut on dire pour la variance ? pour les autres moments (sans démonstration)

Exercice 12.

Vous pouvez utiliser l'exercice 11 On pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α est une constante réelle positive

1. Montrer que f est paire et tracer rapidement son graphe.
2. Trouvez α pour que f soit une densité.
On note dans la suite X une variable aléatoire dont f est une densité.
3. X admet elle une densité ? Si oui la calculer
4. Calculer F_X la fonction de répartition de X . Cette fonction est elle paire ? Est elle impaire

$$5. \text{ Recommencer avec } g(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^4} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 13.

Après avoir vérifié que les fonctions suivantes définissent des densités, calculer l'espérance et la variance associée si elles existent.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 4\frac{\ln x}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 14.

Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a; b])$

Exercice 15.

Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant normale de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 16.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{2}{t^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Montrer que f admet une espérance et calcule cette espérance.
3. Montrer que f n'admet pas de variance

Exercice 17.

Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. En utilisant les propriétés de la loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x) dx$ puis donner sa valeur.
2. Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X .
3. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x h(x) dx$ puis donner sa valeur.
En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

Couple et suite de vad

Exercice 18.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On note $I = \inf(X, Y)$ le minimum et $S = \sup(X, Y)$ le maximum des deux lois.

1. Écrire une fonction scilab `function tab=maxexp(n,l)` qui revoie un tableau où chaque case est la simulation d'une expérience décrite précédemment. n désigne la longueur du tableau et l le paramètre de la loi exponentielle.
2. Calculer une densité de S .
3. Calculer la fonction de répartition de I et reconnaître la loi de I .
4. Montrer que $X + Y = I + S$ et calculer l'espérance de S .
5. S et I sont-elles indépendantes?

Exercice 19 (ECRICOME 2008).

Le participant d'un jeu lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{\text{ème}}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3 .

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i .
2. Déterminer l'espérance de X_i .
3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t .
4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M .
5. Quelle est la probabilité de l'événement $G = \text{"le joueur gagne la partie"}$?

Lois usuelles

- Exercice 20.** 1. Tracer le tableau de variation de la densité $f_{m,\sigma}$ d'une variable aléatoire loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On justifiera les limites, et on étudiera la concavité/convexité ainsi qu les points d'inflexion.
2. En quel point $f_{m,\sigma}$ atteint-elle son maximum? (C'est le mode)

Exercice 21.

Soit $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$ et soit $V \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 3)$ indépendantes, trouver la loi de $2U + 3V$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(2)$ et soit $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(3)$ indépendantes, trouver la loi de $3X + Y$

Exercice 22.

On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\Phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

1. Montrer que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
2. Trouver un réel μ tel que $\Phi_{m,\sigma}(\mu) = \frac{1}{2}$
3. On appelle ce réel une médiane. Pourquoi?

- Exercice 23.** 1. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
Montrer que $Y = \mu X$ suit une loi classique dont on donnera le paramètre.

2. Soit $\lambda > 0$ montrer que

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

Exercice 24.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ et $\alpha > 0, \beta$ deux réels. Montrer que $Y = \alpha X + \beta$ suit une loi usuelle.

Exercice 25.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ et on note X^* la variable aléatoire centrée-réduite associée à X .

Trouver (sans calculs) la loi de X^*

Exercice 26.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et on note X^* la variable aléatoire centrée-réduite associée à X .

Trouver (sans calculs) la loi de X^*

Exercice 27.

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f .

2. (a) Déterminer la fonction de répartition F de X .

(b) Calculer la médiane de X c'est-à-dire le réel μ tel que $\mathbb{P}(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.

3. On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o , et le déterminer.

4. (a) En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X

a une espérance et montrer que $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

(b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de X .