ESSEC 2014 - ECE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont inviter à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Dans tous le sujet $I =]a;\, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont **réels ou infinis**. On dit qu'une densité de probabilité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- continue sur I ;
- strictement positive sur I ;
- nulle en dehors de I.

On écrit alors simplement f est CSP(I).

On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires continues.

Partie 1 – Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).
- U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;\, 1[$ et qui est indépendante de X.
- h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0;\, 1]$.

On se propose d'établit la formule suivante :

$$P([U \leqslant h(X)]) = P([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\forall x \in I$, $\Psi(x) = P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])$

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x,y) = \max\limits_{t\in[x;\,y]} h(t)$ et $m(x,y) = \min\limits_{t\in[x;\,y]} h(t)$.
   (a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x;\, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x;\, y]$ tel que $M(x,y) = h(\alpha_y)$

RÉPONSE:

La fonction h est continue sur l'intervalle fermé borné (segment) $[x;\, y]$. D'après un théorème du cours h est borné et atteint ses bornes. Notamment h atteint son maximum en un point que l'on note α_y

$*$

(b) En déduire que : $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)$

RÉPONSE:

On a pour tout $y \in$
$intffxb$

$$x \leqslant \alpha_y \leqslant y$$

donc en utilisant le théorème des gendarmens

$$\lim_{y \to x} \alpha_y = x$$

Comme h est continue

$$\lim_{y \to x} h(\alpha_y) = h(x)$$

ce qui démontre

$$\boxed{\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)}$$

*

(c) Montrer de même que $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ x < y}} M(x, y) = h(y)$

RÉPONSE:

Comme h est continue, pour tout $x \in [a;\, y]$, il existe un β_x $[x;\, y]$ tel que

$$h(\beta_x) = M(x, y)$$

Comme

$$x \leqslant \beta_x \leqslant y$$

d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{x \to y} \beta = y$$

et comme h est continue

$$\lim_{x \to y} h(\beta_y) = h(y)$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to y \\ x < y}} M(x, y) = h(y)}$$

*

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) que $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} m(x, y) = h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ x < y}} m(x, y) = h(y)$.

2. Soit x et y des réels de I tels que $x < y$.

(a) Établir l'inclusion suivante entre événements :

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \subset [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x, y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leqslant (F(y) - F(x))\, M(x, y)$$

RÉPONSE:

Soit $\omega\Omega$ tel que

$$[x < X(\omega) \leqslant y] \cap [U(\omega) \leqslant h(X(\omega))]$$

alors comme $x < X(\omega) \leqslant y$ et comme M est le maximum de h sur l'intervalle $[x;\, y]$, alors

$$h(X(\omega)) \leqslant M(x, y)$$

ce qui démontre que

$$U(\omega) \leqslant M(x, y)$$

$$\boxed{[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \subset [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x, y)]}$$

On a donc par croissance de P

$$P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)]) \leqslant P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x, y)])$$

Or X et U étant indépendantes

$$P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x, y)]) = P(x < X \leqslant y) P(U \leqslant M(x, y))$$

On a par définition d'une fonction de répartition

$$P(x < X \leqslant y) = F(y) - F(x)$$

et comme U suit la loi uniforme et que h est à valeurs dans $]0;\, 1[$.

$$P(U \leqslant M(x, y) = M(x, y)$$

De plus

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] = ([X \leqslant y] \setminus [X \leqslant x]) \cap [U \leqslant h(X)] = ([X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)]) \setminus ([X \leqslant x] \cap \cap [U \leqslant h(X)])$$

ce qui démontre que

$$P([x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)]) = P([X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)]) - P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)]) = \Psi((y) - \Psi(x)$$

$$\boxed{\Psi(y) - \Psi(x) \leqslant (F(y) - F(x))\, M(x, y)}$$

*

(b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leqslant \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leqslant \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y)$$

RÉPONSE:

On part de l'inégalité

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant m(x, y)] \subset [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)]$$

ce qui démontre

$$\boxed{(F(y) - F(x))m(x, y) \leqslant \Psi(y) - \Psi(x)}$$

Remarque : (il faut surement détailler un peu plus)
On a donc

$$(F(y) - F(x))m(x, y) \leqslant \Psi(y) - \Psi(x) \leqslant (F(y) - F(x))M(x, y)$$

Comme $y - x > 0$

$$\boxed{\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leqslant \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leqslant \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y)}$$

*

(c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

RÉPONSE:

Comme F est la fonction de répartition de X et f sa densité on a $F' = f$
On a donc

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = F'(x) = f(x)$$

On a vu que

$$\lim_{y \to x} m(x, y) = h(x) = \lim_{y \to x} M(x, y)$$

donc

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) = \lim_{y \to x} \lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y) = f(x)h(x)$$

en utilisant le théorème des gendarmes

$$\lim_{y \to x} \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} = f(x)h(x)$$

$$\boxed{\Psi \text{ est dérivable et pour } x \in I \ \Psi'(x) = f(x)h(x)}$$

*

3. (a) En déduire que pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

RÉPONSE:

Soit x et y deux réels de I tels que $x \leq^q slanty$ D'après la question précédente

$$\forall t \in [x;\, y] \qquad \Psi'(t) = f(t)h(t)$$

Donc

$$\int_x^y \Psi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$[\Psi(t)]_x^y = \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t}$$

*

(b) Établir pour tout x dans I, $\Psi(x) \leqslant F(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \qquad \Psi(x) = \int_a^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

RÉPONSE:

On a, pour $x \in I$

$$[X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)] \subset [X \leqslant x]$$

donc par croissance d'une probabilité

$$P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)]) \leqslant P(X \leqslant x)$$

donc

$$\boxed{\text{Pour } x \in I,\ \Psi(x) \leqslant F(x)}$$

On sait aussi qu'une probabilité est positives

$$\forall x \in I \qquad 0 \leqslant \Psi(x) \leqslant F(x)$$

Comme f est $\mathrm{CSP}(I)$ f est nulle en dehors de I et donc

$$F(a) = \int_{-\infty}^a 0\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a 0\,\mathrm{d}t = 0$$

comme une fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a) = 0$$

et donc en utilisant le théorème des gendarmes
comme

$$\boxed{\lim_{x\to a} \Psi(x) = 0.}$$

Comme pour x et y dans I

$$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

et que la fonction $x \mapsto \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$ est, d'après le théorème fondametale de l'analyse dérivable donc continue

$$\lim_{x\to a} \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{Pour } y \in I\ ,\Psi(y) = \int_a^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t}$$

*

(c) Établir ; pour tout x dans I, $P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = P([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x)$. En déduire : $\lim\limits_{x\to b} \Psi(x) = P([U \leqslant h(X)])$, puis :

$$P([U \leqslant h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>RÉPONSE:</u>

On a

$$\begin{aligned} P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) + \Psi(x) &= P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) + P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)]) \\ &= P(([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) \cup ([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])) \qquad \text{union disjointe} \\ &= P(([X > x] \cup [x \leqslant x]) \cap [U \leqslant h(X)]) \\ &= P(\Omega \cap [U \leqslant h(X)]) \\ &= P(U \leqslant h(X)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } I,\ P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = P([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x).}$$

On a

$$[X > x] \cap [U \leqslant h(X)] \subset [X > x]$$

donc par croissance d'une probabilité

$$P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) \leqslant P(X > x)$$

donc

$$0 \leqslant P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) \leqslant 1 - F(x)$$

Or F comme fonction de répartition est continue

$$\lim_{x \to b} F(x) = F(b)$$

et comme f est nulle en dehors de I, on a $F(b) = 1$
donc en utilisant le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \to b} P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = 1$$

donc

$$\lim_{x \to b} P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = 0$$

donc

$$\lim_{x \to b} P([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x = 0$$

ce qui démontre

$$\boxed{\lim_{x \to b} \Psi(x) = P([U \leqslant h(X)])}$$

En utilisant le résultat de la question 3a

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t = P([U \leqslant h(X)])$$

et comme d'après le théorème fondamentale de l'analyse $x \to \int_a^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$ est continue et donc

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui démontre le résultat demandé.

*

4. Montrer que $P([U < h(X)]) = 1 - P([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$ et en déduire

$$P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

RÉPONSE:

$$\overline{[U < h(X)]} = [U \geqslant h(X)] = [-U \leqslant -h(X)] = [1 - U \leqslant 1 - h(X)]$$

ce qui démonre que

$$P([U < h(X)]) = 1 - P([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$$

La fonction $g = 1 - h$ vérifie les même conditions que h, notamment elle est à valeurs dans $[0;\, 1]$.
*De plus on pourrait montrer que $V = 1 - U$ suit une loi uniforme sur $]0;\, 1[$ on peut donc appliquer le résultat précédent

$$P(V \leqslant g(X)) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$P(1-U \leqslant 1-h(X)) = \int_a^b (1-h(t))f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P(1-U \leqslant 1-h(X)) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b h(t))f(t)\,\mathrm{d}t$$

par définition d'une densité

$$P(1-U \leqslant 1-h(X)) = 1 - \int_a^b h(t))f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui démontre que

$$P([U < h(X)]) = 1 - P(1-U \leqslant 1-h(X)) = \int_a^b h(t))f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{P(U < h(X)) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t}$$

*

Partie 2– Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux réels appartenant à l'intervalle $]0;\ 1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activités S_1, S_2 et S_3. On suppose que :

- pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
- pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
- pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que le modèle est viable s'il existe des quantités de production x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$,$x_2 > 0$, $x_3 > 0$ tels que

$$\begin{cases} x_1 & > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 & > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 & > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

RÉPONSE:

Supposons que x_1, x_2, X_3 sont les quantités de chaque secteur produit dans un cas de stabilité. Calculons les biens du secteurs 1 qui sont consommé :

- Pour produire les biens du secteur 1, il en faut αx_1
- Pour produire les biens du secteur 2, il en faut βx_1

La qauntité x_1, il faut donc $\alpha x_1 + \beta x_2$ biens du secteurs. Pour que le système soit stable il faut que la quantité produite x_1 soit plus grande que la quantité utilisée.

$\square$

$*$

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne à composante strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

RÉPONSE:

C'est la traduction matricielle de la réponse précédente.

$\square$

$*$

6. (a) Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace vectoriel associé.

RÉPONSE:

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = (\alpha+\beta)X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (alpha+\beta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y & = (\alpha+\beta)x \\ \alpha x \quad + \beta z & = (\alpha+\beta)y \\ \quad \alpha y + \beta z & = (\alpha+\beta)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta x + \beta y & = 0 \\ \alpha x - (\alpha+\beta)y + \beta z & = 0 \\ \quad \alpha y - \alpha z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y & = 0 \\ \alpha x - (\alpha+\beta)y + \beta z & = 0 \\ \quad y - z & = 0 \end{cases} \qquad \text{car } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ \alpha x - (\alpha+\beta)x + \beta x & = 0 \end{cases} \qquad \text{substitution}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Comme il existe des solutions non nulles

$$\boxed{\alpha+\beta \text{ est une valeur propre de } A \text{ et son sous espace propre associé est Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$$

*

(b) En déduire que si $\alpha+\beta < 1$ alors le modèle est viable.

RÉPONSE:

Supposons que $\alpha+\beta < 1$ d'après la question précédente

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha+\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\alpha+\beta-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Comme $\alpha+\beta-1<0$ et que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est à composant positive, on vient de trouver un vecteur X qui correspond au critère de la question 5b.

$$\boxed{\text{Si } \alpha+\beta<1 \text{ le système est viable}}$$

Remarque : $\begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ avec $a>0$ est aussi un vecteur propre et le raisonnement précédent convient. Si l'on produit la même quantité de chaque bien alors le système est viable quelque soit la quantité (positive) produite.

$*$

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1;\,1[$.

7. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha+\beta<1$

RÉPONSE:

On a montré que si $\alpha+\beta<1$ alors le modèle est viable.
Réciproquement supposons que le modèle est viable. D'après ce que l'on a admis, le spectre de A est inclus dans $]-1;\,1[$, notamment $\alpha+\beta$ qui est une valeur propre doit vérifier

$$-1<\alpha+\beta<1$$

$$\boxed{\text{Le modèle est viable si et seulement si } \alpha+\beta<1.}$$

$*$

(b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha+\beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalles $]-1;\,1[$.

RÉPONSE:

Soit λ un réel, étudions l'inversibilité de $A - \lambda I_3$, en étudiant le système homogène associé

$$\begin{cases} (\alpha-\lambda)x + \beta y & = 0 \\ \alpha x - \lambda y + \beta z & = 0 \\ \alpha x + (\beta - \lambda) z & = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x - \lambda y + \beta z & = 0 \\ (\alpha-\lambda)x + \beta y & = 0 \\ \alpha x + (\beta - \lambda) z & = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x - \lambda y + \beta z & = 0 \\ (\alpha-\lambda)x + \beta y & = 0 \cdots \\ \alpha x + (\beta - \lambda) z & = \end{cases}$$

$\square$

$*$

8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0;\,1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0;\,1[$ admettant une densité de probabilité qui est CSP($]0;\,1[$).

   En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - E(\beta)$.

RÉPONSE:

Le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$ *i.e.* $\alpha < 1 - \beta$
On cherche à déterminer

$$P(\alpha < h(\beta))$$

avec $h :: \begin{array}{ccc}]0;\,1[& \to &]0;\,1[\\ x & \mapsto & 1-x \end{array}$

Comme α suit la loi uniforme et une densité f de β est CSP($]0;\,1[$) on peut donc appliquer le résultat de la question 4

$$\begin{aligned} P(\alpha+\beta<1) &= P(\alpha < 1-\beta) \\ &= \int_0^1 (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t) t f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \int_0^1 f(t) t f(t)\,\mathrm{d}t && \text{définition d'une densité} \\ &= 1 - E(\beta) && \text{définition d'une espérance} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{la probabilité que le modèle soit viable vaut } 1 - E(\beta).}$$

$*$

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i et $y_i + z_i$ le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliqué uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant à prix coûtant y_i.

   On définit les deux matrices lignes $Y = (y_1\ y_2\ y_3)$ et $Z = (z_1\ z_2\ z_2)$ ainsi que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = YA + ZB$

RÉPONSE:

$$YA + ZB = (\alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2)\ \beta(y_1 + z_1) + \alpha(y_3 + z_3)\ \beta(y_2 + z_2)\ \beta y_3)$$

Pour produire une unité de bien du secteur 1, il faut

- α unité de bien du secteur qui sont obtenues à prix coutant y_1, pour un prix total de αy_1
- α unité de bien du secteur 2 qui sont obtenu à un prix $y_2 + z_2$ pour un total de $\alpha(y_2 + z_2)$

Au total le prix de production d'une unité de bien du secteur 1 est de $\alpha y_1 + \alpha(y_2 + z_2)$ ce qui est égal à la quantité précédente.

$$\boxed{Y = YA + ZB}$$

$*$

   (b) Justifier sans calcul l'inversibilité de $I_3 - A$.

RÉPONSE:

On suppose que le système est viable donc d'après ce qui précède toutes les valeurs propres sont dans $]-1;1[$. Donc 1 n'est pas valeur propre et donc par définition $A - 1I_3$ es inversible.

$$\boxed{I_3 - A \text{ est inverible}}$$

$*$

   En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} Y = YA + ZB &\Leftrightarrow Y - YA = ZB \\ &\Leftrightarrow Y(I_3 - A) = ZB \\ &= Y = ZB(I_3 - A)^{-1} \qquad \text{car } I_3 - A \text{ est inversible} \end{aligned}$$

$$\boxed{ZB(I_3 - A)^{-1} \text{ est l'unique soution.}}$$

*

Partie 3 – Simulation de variables aléatoires

Cette partie a été modifiée pour être adaptée au programme actuel.

La plupart des langages informatique possèdent un générateur de nombre aléatoire. En Scilab par exemple, on dispose de l'instruction `rand()`. Ces générateurs produise une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0;\,1[$.
On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ce générateur aléatoire `rand()`.

On ne pourra dans aucun cas utiliser l'instruction `grand`.

Jusqu'à la fin du problème : On note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

Partie 3 a– Simulation par la méthode d'inversion

10. (a) On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0;\,1[$.

RÉPONSE:

On sait que

$$\forall x \in I \qquad H(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad H'(x) = f(x)$$

Comme f est CSP(I) f est strictement positive sur I donc H' est strictement positive donc H est strcitement croissante.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} H(x) = G(a) = \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

La première égalité s'obtient par continuité, la deuxième découle de CSP.

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} H(x) = G(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Comme H est la restriction d'une fonction de répartition, elle est continue sur I.
D'après le théorème de la bijection monotone H ralise une bijection de I vers $\left]\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} H(x);\, \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} H(x)\right[=]0;\,1[$

$$\boxed{H \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur }]0;\,1[.}$$

*

On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variations de H^{-1}

RÉPONSE:

D'après les théorèmes du cours on sait que H et H^{-1} ont même monotonie

x	0		1
Variation de H	a	$\nearrow$	b

*

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;\,1[$. On pose $X = H^{-1}(U)$ et on note F la fonction de répartition de X.

(b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

RÉPONSE:

On rappele que la fonction de répartition de U est pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } t \in]0;\,1[\\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t \end{cases}$$

Soit $x \in I$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leqslant x) \\ &= P(H^{-1}(U) \leqslant x) \\ &= P(U \leqslant H(x)) && \text{car } H \text{ est croissante sur } I \\ &= H(x) && \text{car } U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;\,1[) \text{ et } H(x) \in]0;\,1[\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } I,\ F(x) = G(x).}$$

*

(c) En déduire que X suit la même loi que Z.

RÉPONSE:

Comme H^{-1} est à valeurs dans I, Z et X ont donc même support I. Le calcul précédent permet donc d'affirmer

$$\boxed{X \text{ suit la même loi que } Z.}$$

*

11. Simulation de lois exponentielles.
On suppose dans cette question que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
   (a) Expliciter l'intervalle I, et les fonctions g, G et H^{-1}.

RÉPONSE:

$I =]0; +\infty[$. et pour $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit $y \in]0; 1[$

$$\begin{aligned} y = H(x) &\Leftrightarrow y = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &\Leftrightarrow 1 - y = \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &\Leftrightarrow \ln(1-y) = -\lambda x && \text{on rappelle que} y \in]0; 1[\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y) \end{aligned}$$

$$\boxed{I =]0; +\infty[. \text{ et pour } x \in]0; 1[\ H^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x)}$$

*

   (b) Écrire une fonction en Scilab d'en-tête `function z=expo(lambda)` qui simule (une fois) la loi exponentielle.

RÉPONSE:

```
function z= expo(lambda)
    r=rand()
    z=log(1-r)*(-1/lambda)
endfunction
```

*

12. Simulation de la loi de Laplace.
On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} \qquad \text{(densité de Laplace)}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant le loi uniforme sur $\{-1,\ 1\}$ ce qui signifie :

$$P([V=-1]) = P([V=1]) = \frac{1}{2}$$

On pose $X = VY$.

(a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

RÉPONSE:

g est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto |x|$ et $y \mapsto \exp(-y)$ g est positive car une exponentielle est positive et $\frac{1}{2} > 0$.
De plus g est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique et pour $x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = \frac{1}{2}\exp(-|-x|) = \frac{1}{2}\exp(-|x|) = g(x)$$

Soit $A > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^A g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^A \frac{1}{2}\exp(-|x|)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^A \exp(-x)\,\mathrm{d}x && \text{réels positifs} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\exp(-x)\right]_0^A \\
&= \frac{1}{2}\left(-\exp(-A)+1\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}$$

Par parité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge et vaut } 1$$

$$\boxed{g \text{ est une densité}}$$

Comme ici $I = \mathbb{R}$ et que g est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et qu'il n'y a pas d'en dehors de I

$$\boxed{g \text{ est CSP}(\mathbb{R})}$$

*

(b) Établir :

- Pour tout $x \geqslant 0$, $P([X > x]) = \frac{1}{2}P([Y > x])$

RÉPONSE:

Soit $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
P([X > x]) &= P(VY > x) \\
&= P(V = -1)P_{V=-1}(VY > x) + P_{V=1}P_{V=1}(VY > x) && \text{probabilités totales} \\
&= P(V = -1)P(-Y > x) + P_{V=1}(Y > x) \\
&= P(V = 1)P(Y > x) && \text{car } P(-Y > x) = 0 \ Y \text{ étant à valeurs positives}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geqslant 0,\ P([X > x]) = \frac{1}{2}P([Y > x])}$$

*

- Pour tout $x \leqslant 0$, $P([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{2}P([Y \geqslant -x])$

RÉPONSE:

Soit $x \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
P([X \leqslant x]) &= P(VY \leqslant x) \\
&= P(V = -1)P_{V=-1}(VY \leqslant x) + P_{V=1}P_{V=-1}(VY \leqslant x) && \text{probabilités totales} \\
&= P(V = -1)P(-Y \leqslant x) + P_{V=1}(Y \leqslant x) \\
&= P(V = -1)P(-Y \leqslant x) && \text{car } P(Y \leqslant x) = 0 \ Y \text{ étant à valeurs positives}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \leqslant 0,\ P([X \leqslant x]) = \frac{1}{2}P([Y \geqslant -x])}$$

*

(c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

RÉPONSE:

Soit $x \leqslant 0$ alors

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leqslant x) \\
&= \frac{1}{2}P(Y \geqslant -x) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - P(Y < -x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-(-x)}\right)\right) && \text{fct de répartition de } Y \text{ et } -x > 0 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

Si $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leqslant x) \\ &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} P(Y > x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - P(Y \leqslant x)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)\right) \quad \text{fct de répartition de } Y \text{ et } x > 0 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

*

(d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

RÉPONSE:

F_X est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. De plus

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2}$$

Ce qui démontre que F_X est continue en 0.
Donc X admet une densité f_X et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ce qui donne Donc X admet une densité f_X et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\boxed{X \text{ est une variable aléatoire continue admettant } g \text{ comme densité.}}$$

*

(e) Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace.

```
function x=Laplace()
    y=expo(1)
    v=rand()
    if v<1/2 then
        x=y
    else
        x=-y
    end
endfunction
```

Partie 3b– Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant cf(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0;\ 1]$ telle que :

$$\forall x \in I, \qquad g(x) = cf(x)h(x)$$

RÉPONSE:

Comme f est CSP(I)

$$\forall x \in I \qquad f(x) \neq 0$$

et comme $c \neq 0$ donc on peut poser

$$\forall x \in I \qquad h(x) = \frac{g(x)}{cf(x)}$$

Avec cette fonction h on a

$$\forall x \in I, \qquad g(x) = cf(x)h(x)$$

De plus g, c et f sont positifs donc h est positives et $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant cf(x)$, h est plus petite que 1

*

On considère alors :

- une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent la loi uniforme sur $]0;\ 1[$.
- une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]a; b[$, ayant toutes la même loi de densité de probabilités f et de fonction de répartition F.

On suppose de plus que pour tout $n \geqslant 1$ les variables X_1, X_2,..., X_n, U_1, U_2,..., U_n sont mutuellement indépendantes.

On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

14. En utilisant la partie 1, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(U_k \leqslant h(X_k)]) = \frac{1}{c}$$

En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

RÉPONSE:

X_k, U_k et h vérifient bien les hypothèses de la première partie

$$P(U_k \leqslant h(X_k)) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t$$

Or d'après la question précédente pour tout $t \in I$

$$f(t)h(t) = \frac{1}{c}g(t)$$

donc

$$P(U_k \leqslant h(X_k)) = \frac{1}{c}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

donc comme g est une densité

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\boxed{P(U_k \leqslant h(X_k)]) = \frac{1}{c}}$$

Comme les événement $([U_k \leqslant h(X_k)])_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants (lemme des coalitions) le premier succes ...

$$\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{G}({}^{1}/_{c}),\ E(N) = c,\ V(N) = \frac{c^2}{1-c}}$$

*

On définit la variable X comme étant la valeur de X_N, c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Exprimer l'événement $[X \leqslant x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

RÉPONSE:

$$\boxed{[X \leqslant x] \cap [N = n] = ([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]}$$

*

(b) En utilisant la question 3(b) , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c} G(x)$$

RÉPONSE:

On est bien dans le cadre de la partie I. g est CSP(I), h est à valeur dans $[0;\, 1]$ et continue

$$\begin{aligned} P([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) &= \int_a^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t && \text{question 3b} \\ &= \frac{1}{c}\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t && \text{définition de } h \\ &= \frac{1}{c}G(x) && \text{fonction de répartition et } g \text{ est CSP}(I) \end{aligned}$$

$$\boxed{P([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c} G(x)}$$

*

(c) En déduire $P([X \leqslant x] \cap [N = n])$ en fonction de c et $G(x)$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} P([X \leqslant x] \cap [N = n]) &= P\left(([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\right) \\ &= P\left([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]\right) \prod_{k=1}^{n-1} P(U_k > h(X_k)) && \text{indépendance} \\ &= P\left([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]\right) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - P(U_k \leqslant h(X_k))) \\ &= \frac{1}{c}G(x) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - P(U_k \leqslant h(X_k))) && \text{question précédente} \\ &= \frac{1}{c}G(x) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{1}{c}) && \text{question 14} \\ &= \frac{1}{c}G(x) \frac{(c-1)^{n-1}}{c^{n-1}} && \text{question 14} \end{aligned}$$

$$\boxed{P([X \leqslant x] \cap [N = n]) = \frac{1}{c} G(x) \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1}}$$

*

(d) Montrer finalement que $P([X \leqslant x]) = G(x)$.

RÉPONSE:

En utilisant le théorème des probabilités totales avce le SCE $[N = n]_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned}
P([X \leqslant x]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} ([X \leqslant x] \cap [N = n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c} G(x) \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{c} G(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{c} G(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{n} && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{1}{c} G(x) \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{c}\right)} && \text{série géométrique} \\
&= \frac{1}{c} G(x) c \\
&= G(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{P([X \leqslant x]) = G(x).}$$

Remarque : Comme $\left(1 - \frac{1}{c}\right)$ est une probabilite ce réel est dans $[0;\, 1]$ et comme $c > 0$, $1 - \frac{1}{c} < 1$.

*

16. Conclure.

RÉPONSE:

□

*

17. Simulation de la loi normale.
Dans cette question Z suit la loi normale centrée et réduite, donc $I = \mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question 12), définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.
   (a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

*

   (b) Étudier les variations sur $[0; +\infty[$ de la fonction $a\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}$.

RÉPONSE:

Cette fonction est dérivabke sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions usuelles et pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$a'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}$$

On obtient donc

x	0		1		$+\infty$
Signe de a'		$+$	0	$-$	
Variation de a	1	$\nearrow$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	

*

   (c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \geqslant 0 : g(x) \leqslant \dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

RÉPONSE:

On a pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{g(x)}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{x-\dfrac{x^2}{2}}$$

donc Donc d'après le tableau d variations précédent

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{g(x)}{\mathrm{e}^{-x}} \leqslant \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{c = \frac{2\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi}}}$$

$*$

(d) En déduire que pour tout x réel, $g(x) \leqslant cf(x)$.

RÉPONSE:

Les deux densité sont paires . . .

□

$*$

(e) Expliciter alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée et réduite. On explicitera en particulier la fonction h introduite à la question 13.

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{POur } x \in \mathbb{R}\ h(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2}}}$$

$*$

(f) Compléter

```
function y=h(x)
        y=sqrt(2*%pi)/(2*sqrt(exp(1))*exp(x-x^2/2)
endfunction

function z=normalecr()
        x=Laplace()
        u=rand()
        while h(x)>u   do
                x=Laplace()
                u=rand()
        end
        z=x
endfunction
```

(g) Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale réduite centrée. Soit $\alpha > 0$ et β des réels. Quelle est la loi suivie par $Y = \alpha X + \beta$ (démontrer ce résultat).

RÉPONSE:

□

*

(h) En déduire une fonction Scilab d'entête `function y=normale(m,sigma)` simulant une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On utilisera la fonction `normalecr` introduite dans la question précédente.

RÉPONSE:

□

*