EDHEC 2016 - ECE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont inviter à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

RÉPONSE:

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I_3 \text{ et } X^2 - 4X + 4 \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

*

2. (a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

RÉPONSE:

On a

$$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$$

et comme toute valeur propre de A doit être racine du polynôme annulateur

$$\boxed{\text{La seule valeur propre éventuelle de } A \text{ est } 2}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul

$$\begin{aligned} X \text{ est vecteur propre associé à } 2 &\Leftrightarrow AX = 2X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z & = 2x \\ 2x + \quad 2z & = 2y \\ x - y + 3z & = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x - y + z = 0 \end{aligned}$$

Comme cette équation admet des solutions non nulles

$$\boxed{2 \text{ est valeur propre de } A.}$$

*

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

RÉPONSE:

Si A était diagonalisable, comme 2 est son unique valeur propre, il existerait une matrice P inversible telle que

$$A = P(2I_3)P^{-1}$$

ce qui démontrerait que

$$P = 2I_3$$

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

0 n'est pas une valeur propre de A donc

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

*

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

RÉPONSE:

D'après les calculs de la question précédente Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul

$$\begin{aligned} X \text{ est vecteur propre associé à } 2 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y - z \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc E_2 le sous espace propre associé à 2 est engendré par $(e_1 + e_2, -e_1 + e_3)$ comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une base de E_2

$$\boxed{\text{Une base de } E_2 \text{ est } (e_1 + e_2, -e_1 + e_3).}$$

*

4. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

Soit α, β et γ des réels

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma & = 0 \\ \alpha + \quad \gamma & = 0 \\ \beta + \gamma & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -gamma + \gamma + \gamma & = 0 \\ \alpha & = -\gamma \\ \beta\gamma & = -\gamma \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

La famille

$$(u_1, u_2, u_3)$$

est donc libre. Comme de plus Dim $^3_R = 3$

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

*

(b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

RÉPONSE:

Par définition

$$f(u_1) = 2u_1 \qquad f(u_2) = 2u_2$$

Et on a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit α, β des réels

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 + 2u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 2 & = 3 \\ \alpha + 2 & = 4 \\ \beta + 2 & = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \qquad \beta = 1$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

*

(c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

RÉPONSE:

On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On constate que $N^2 = 0$, donc pour tout entier $k \geqslant 2$, $N^k = 0$

Soit $n \geqslant 2$ I et N commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme.

$$\begin{aligned} T^n &= (2I + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k \\ &= (2I)^n N^0 + \binom{n}{1} (2I)^{n-1} N^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k \\ &= 2^n I_3 + n2^{n-1} N \end{aligned}$$

De plus cette formule est vraie pour $n = 0$, en effet $T^0 = I_3$ et $2^0 I_3 + 02^{0-1} N = I_3$ elle est aussi valable pour $n = 1$, en effet$T^1 = 2I + N = 2^1 I_3 + 1 \times 2^{1-1} N$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}\ T^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N.}$$

*

5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

RÉPONSE:

POur $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$T^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N$$
$$2^n I_3 - n2^n I_3 + n2^{n-1}(N + 2I_3)$$
$$= n2^{n-1}T - (n-1)2^n I$$

Comme T et A représente le même endomorphisme dans deux bases différentes, il exise une matrice P inversible telle que

$$A = PTP^{-1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(PTP^{-1}\right)^n \\
&= PT^nP^{-1} && \text{classique} \\
&= P\left(n2^{n-1}T - (n-1)2^n I\right)P^{-1} && \text{remarque précédente} \\
&= n2^{n-1}PTP^{-1} - (n-1)2^n PIP^{-1} \\
&= n2^{n-1}A - (n-1)2^n I
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I}$$

*

(b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

RÉPONSE:

$$A^2 - 4A = -4I_3$$

Donc

$$A\left(\frac{-1}{4}A + I\right) = I_3$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{-1}{4}A + I}$$

*

(c) Vérifier que la formule trouvée à la question $5a)$ reste valable pour $n=-1$.

RÉPONSE:

Or $-1\times 2^{-1-1}A-(-1-1)2^{-1}I=\dfrac{-1}{4}A+I$

$$\boxed{\text{La formule est vraie pour } n=-1.}$$

*

EXERCICE 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x\in[n;+\infty[\,,\quad : f_n(x)=\displaystyle\int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. **Étude de f_n.**

(a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[n;+\infty[$ puis déterminer $f_n^{'}(x)$ pour tout x de $[n;+\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

RÉPONSE:

La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de $t\mapsto\sqrt{t}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ et de $u\mapsto \mathrm{e}^u$ continue sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème fondamentale de l'analyse

$$\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [n;+\infty[}$$

et de plus

$$\text{pour } x\in[n;+\infty[\qquad f_n'(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$$

Comme une exponentielle est strcitement positive

$$\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [n;+\infty[.}$$

*

(b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$.

RÉPONSE:

On a pour tout $t\geqslant n\geqslant 1$

$$1\leqslant\sqrt{t}$$

donc par croissance de l'exponentielle

$$\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$$

par croissance de l'intégrale, comme les bornes sont dans le bon sens.

$$\int_n^x \mathrm{e}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{e}(x-n) \leqslant f_n(x)$$

Comme $\mathrm{e} > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}(n-x) = +\infty$ et donc en utilisant le théorème des encadrements

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$$

$*$

(c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n; +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$

RÉPONSE:

ue Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[n; +\infty[$, et de plus $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

$$1 \in \left[f_n(n); \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \right[$$

D'après le théorème de la bijection monotone

$$\boxed{\text{Il existe un unique } u_n \in [n; +\infty[\text{ tel que } f_n(u_n) = 0.}$$

$*$

.

2. **Étude de la suite (u_n).**

(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

RÉPONSE:

D'après les questions précédentes

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \leqslant u_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n$$

D'après le théorème des encadrements

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

*

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\qquad \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

RÉPONSE:

Par croissance de l'exponentielle, pour tout $t \in [n;\, u_n]$

$$\mathrm{e}^{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{t}} \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{u_n} \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\mathrm{e}^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leqslant f_n(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

donc

$$\mathrm{e}^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

comme les exponentielles sont positives, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \qquad \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}$$

*

.

3. (a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while exp(-sqrt(n))>10^{-4}
        n=n+1
end
disp(n)
```

(b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln 10$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4} &\Leftrightarrow -\sqrt{n} \leqslant \ln\left(10^{-4}\right) && \text{le logarithme est croissant} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{n} \leqslant -4\ln(10) \\ &\Leftrightarrow 4\ln(10) \leqslant \sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow (4\ln 10)^2 \leqslant n \end{aligned}$$

Comme

$$4\ln 10 \approx 2,3 \times 4 \approx 9,2 \qquad (9.2)^2 = 84,64$$

$\boxed{\text{La valeur affichée est } 85}$

*

4. On pose $v_n = u_n - n$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

RÉPONSE:

D'après la question 2b

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (2a) et $\lim x \to +\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{u}} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} = 0$$

de plus

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = 0$$

D'après le théorème des encadrements

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

*

   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

RÉPONSE:

Soit $x \in [-1; +\infty[$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} &\Leftrightarrow 1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 && \text{croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+ \\ &\Leftrightarrow 1 + x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

par remonté d'équivalences et comme un carré est positif

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ supérieur ou égal à } -1, \text{ on a : } \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}.}$$

*

   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\exp\left(-\sqrt{u_n}\right) &= \exp\left(-\sqrt{u_n - n + n}\right)\\ &= \exp\left(-\sqrt{v_n + n}\right)\\ &= \exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right)\end{aligned}$$

Or d'après ce qui précède

$$\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \leqslant 1 + \frac{v_n}{2n}$$

donc comme $\sqrt{n} > 0$

$$\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}} \leqslant \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$$

et par croissance de l'exponentielle

$$\exp\left(-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{v_n}{n}}\right) \geqslant \exp\left(-\left(\sqrt{n}+\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)\right)$$

et donc

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \mathrm{e}^{-\sqrt{u_n}} \geqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$$

*

(d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ en combinant 2b et la question précédente

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant u_n - n \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$$

Comme $E^{-\sqrt{n}} >$

$$\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{u_n - n}{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$$

Or (4a)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \qquad \lim_{n+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$$

Par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = \mathrm{e}^{-0} = 1$$

donc enutilisant le théorème des encadrements

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}} = 1$$

$$\boxed{u_n - n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}$$

*

EXERCICE 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On désigne par p un réel de $]0;\ 1[$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3;\ 1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1;\ 3]$.
On considère également une variable aléatoire Z,indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = -1) = 1 - p$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) & \text{si} \quad Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

RÉPONSE:

D'après le cours

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -3 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } -3 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{si } -1 < x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

*

2. s
   Établir, grâce au système complet d'évènements $((Z = 1), (Z = -1))$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1 - p)F_V(x)$$

(a) RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant le théorème des probabilités totales

$$P(X \leqslant x) = P(Z=1)P_{Z=1}(X \leqslant x) + P(Z=-1)P_{Z=-1}(X \leqslant x)$$

donc par définition de X

$$P(X \leqslant x) = P(Z=1)P(U \leqslant x) + P(Z=-1)P(V \leqslant x)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x)}$$

*

(b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3;\, 3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

RÉPONSE:

Si $Z = 1$ alors X peut prendre toute les valeurs de X *i.e.* $[-1;\, 3]$ et si $Z = -1$, X peut prendre le même valeurs que V *i.e.* $[-3;\, 1]$

$$\boxed{X(\Omega) = [-3;\, 3]}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R}\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ (1-p)\dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-3;\, -1] \\ p\dfrac{x+1}{4} + (1-p)\dfrac{x+3}{4} & \text{si } x \in [-1;\, 1] \\ p\dfrac{x+1}{4} + (1-p) & \text{si } x \in [1;\, 3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$

*

(c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

RÉPONSE:

Comme X admet une densité, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -1; 1; 3\} \qquad f_X(x) = F'_X(x)$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -1; 1; 3\}\ f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{1-p}{4} & \text{si } x \in [-3;\ -1] \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x \in [-1;\ 1] \\ \dfrac{p}{4} & \text{si } x \in [1;\ 3] \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}}$$

*

(d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$.

RÉPONSE:

Les moments d'ordre k, sont définis sous réserve de convergence absolue par

$$m_k(X) = \int_{-3}^{3} x^k f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Ces intégrales ne sont pas des intégrales impropres donc

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

*

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

   (a) Vérifier que l'on a :
$$X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}.$$

RÉPONSE:

Soit $\omega \in \Omega$.

- Si $Z(\omega) = -1$ alors $\dfrac{1+Z(\omega)}{2} = 0$ et $\dfrac{1+Z}{2} = 1$ donc
$$U(\omega)\frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\frac{1-Z(\omega)}{2} = V(\omega)$$
ce qui correspont à ce qui est attendu.
- Si $Z(\omega) = 1$ alors $\dfrac{1+Z(\omega)}{2} = 1$ et $\dfrac{1+Z}{2} = 0$ donc
$$U(\omega)\frac{1+Z(\omega)}{2} + V(\omega)\frac{1-Z(\omega)}{2} = U(\omega)$$
ce qui correspont à ce qui est attendu.

$$\boxed{X = U\tfrac{1+Z}{2} + V\tfrac{1-Z}{2}.}$$

*

(b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.

RÉPONSE:

Par définition

$$E(Z) = p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p - 1$$

Comme U possède une espérance et Z aussi et que Z et U sont indépendantes

$$\begin{aligned} E\left(U\frac{1+Z}{2}\right) &= E(U)E\left(\frac{1+Z}{2}\right) \\ &= E(U)\frac{1+E(Z)}{2} \\ &= \frac{-1+3}{2} \cdot \frac{1+E(Z)}{2} && \text{cours} \\ &= \frac{1+2p-1}{2} \\ &= p \end{aligned}$$

Comme V possède une espérance et Z aussi et que Z et V sont indépendantes

$$\begin{aligned} E\left(V\frac{1-Z}{2}\right) &= E(V)E\left(\frac{1-Z}{2}\right) \\ &= E(V)\frac{1-E(Z)}{2} \\ &= \frac{-3+1}{2} \cdot \frac{1-E(Z)}{2} && \text{cours} \\ &= -\frac{1-2p+1}{2} \\ &= p-1 \end{aligned}$$

Par inéarité de l'espérance

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}\right) \\ &= E\left(U\frac{1+Z}{2}\right) + E\left(V\frac{1-Z}{2}\right) \\ &= p + p - 1 \\ &= 2p - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{X \text{ admet une esperance qui vaut } 2p-1}$$

*

(c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

RÉPONSE:

On ait que

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}\right)^2 \\ &= U^2\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2 + V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2 + 2UV \times \frac{1+Z}{2} \times \frac{1+Z}{2} \\ &= U^2\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2 + V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2 + UV \times \frac{1-Z^2}{2} \end{aligned}$$

Or $Z^2 = 1$

$$= U^2\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2 + V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2$$

En utilisant le formule de Koenings Huygens

$$\begin{aligned} E(U^2) &= V(U) + (E(U))^2 \\ &= \frac{(3+1)^2}{12} + 1 \\ &= \frac{4}{3} + 1 \\ &= \frac{7}{3} E(V^2) && = V(V) + (E(V))^2 \\ &= \frac{(1+3)^2}{12} - 1 \\ &= \frac{4}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De plus en utilisant le théorème de transfert

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+Z}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 p + \left(\frac{1-1}{2}\right)^2 (1-p) \\ &= p \left(\frac{1-Z}{2}\right)^2 && = \left(\frac{1-1}{2}\right)^2 p + \left(\frac{1+1}{2}\right)^2 (1-p) \\ &= 1-p \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= E\left(U^2\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2 + V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2\right) \\
&= E\left(U^2\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2\right) + E\left(V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2\right) && \text{indépendance de } U, V \text{ et } Z \\
&= E\left(U^2\right) E\left(\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2\right) + E\left(V^2\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2\right) && \text{indépendance de } U^2, Z \\
&= E\left(U^2\right) E\left(\left(\frac{1+Z}{2}\right)^2\right) + E\left(V^2\right) E\left(\left(\frac{1-Z}{2}\right)^2\right) && \text{indépendance de } V^2, Z \\
&= \frac{7}{3}p + \frac{1}{3}(1-p) \\
&= 2p + \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Les indépendances découlent du lemme des coalitions

$$\boxed{V(X) = 2p + \frac{8}{3} - (2p-1)^2}$$

$*$

4. (a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.

RÉPONSE:

Les deux valeurs possibles pour $2T-1$ sont -1 et 1.

$$P(2T-1=1) = P(T=1) = p$$

$$P(2T-1=-1) = P(T=0) = 1-p$$

$$\boxed{2T-1 \text{ suit la même loi que } Z}$$

$*$

(b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',p)` sont des commandes `Scilab` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes `Scilab` permettant de simuler U, V, Z, puis X.

RÉPONSE:

```
T=grand(1,1,'bin',p)
Z=2*T-1
U=grand(1,1,'unf',-1,3)
V=grand(1,1,'unf',-3,1)
X=U*(1+Z)/2+V*(1-Z)/2
```

*

PROBLÈME

Partie I : Questions préliminaires.

Dans cette partie x désigne un réel élément de $[0;\,1[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0;\,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;\,x]$,

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} &= \sum_{p=0}^{n-1} t^{p} \\ &= \frac{1-t^{n-1+1}}{1-t} && \text{somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= \frac{1-t^{n}}{1-t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } t \text{ de } [0;\,x],\ \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \frac{1-t^n}{1-t}}$$

*

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

RÉPONSE:

$$\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

donc, par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t}$$

$*$

(c) Établir par encadrement que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.$

RÉPONSE:

$$\forall t \in \left]0;\, x\right[\qquad 0 < 1-x < 1-t$$

donc

$$\forall t \in \left]0;\, x\right[\qquad \frac{1}{1-t} < \frac{1}{1-x}$$

comme $t^n > 0$

$$\forall t \in \left]0;\, x\right[\qquad \frac{t^n}{1-t} < \frac{t^n}{1-x}$$

par croissance de l'intégrale, $0 < x$

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t < \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(1-x}$$

en utilisant le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

$*$

(d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

RÉPONSE:

En passant à la limite (pour n) dans l'égalité obtenue en 1c

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)}$$

$*$

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

RÉPONSE:

Méthode 1 : récurrence Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé, posons pour $g \geqslant m$

$$\mathcal{H}_q \ : \ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

- **initalisation** $q = m$

  $$\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1$$

  et

  $$\binom{m+1}{m+1} = 1$$

  la formule est donc vraie au rang m
- **Hérédité** Soit $q \geqslant m$ supposons que $\mathcal{H}_q$ soit vraie

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} \\
&= \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} && \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \binom{q+2}{m+1} && \text{formule de Pascal}
\end{aligned}$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall q \geqslant m, \ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}}$$

Méthode 2 : somme télescopique

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q} \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1} && \text{formule de Pascal} \\
&= \sum_{k=m}^{q} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m+1} \\
&= \sum_{k=m+1}^{q+1} \binom{k}{m+1} - \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m+1} \\
&= \binom{q+1}{m+1} - \binom{m}{m+1} \\
&= \binom{q+1}{m+1} - 0
\end{aligned}$$

*

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j))$$

RÉPONSE:

La plus petite valeur possible pour X_i est 1 donc la plus petite valeur possible pour S_n est n

$$\boxed{S_n(\Omega)=[\![n;\ +\infty[\![}$$

On a

$$S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$$

donc

$$S_{n+1}-S_n=X_{n+1}$$

En utilisant le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $([S_n=j])_{j\geqslant n}$

$$\begin{aligned}
P\left((S_{n+1}=k\right) &= \sum_{j=k}^{+\infty} P([S_n=j]\cap[S_{n+1}=k]) \\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} P([S_n=j]\cap[S_{n+1}-S_n=k-j]) \\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} P([S_n=j]\cap[X_{n+1}=k-j]) \\
&= \sum_{j=k}^{k-1} P([S_n=j]\cap[X_{n+1}=k-j]) && \text{car } X_{n+1}(\Omega)=\mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\textstyle\sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j))}$$

$*$

   (b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k\in[\![n,+\infty]\!],\quad \mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$$

RÉPONSE:

POur x fixé et $n\in\mathbb{N}^*$ notons et

$$\mathcal{G}_n\ :\ \forall k\geqslant n \qquad \mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$$

- **Initialisation** pour $n = 1$, $S_1 = X_1$ et comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$

$$forallk \in [\![1;+\infty[\![\qquad \mathbb{P}(S_1 = k) = x(1-x)^{k-1}$$

  et

$$\binom{k-1}{1-1} x^1(1-x)^{k-1} = 1 \times x(1-x)^{k-1}$$

- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que

$$\forall k \geqslant n \qquad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = k) &= \sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n = j))\mathbb{P}((X_{n+1} = k-j)) && \text{indépendance +lemme des coalitions} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \mathrm{P}((S_n = j))x(1-x)^{k-j-1} && \text{loi géométrique} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^n (1-x)^{j-n} x(1-x)^{k-j-1} && \text{HR} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \sum_{j=n-1}^{k-2} \binom{j}{n-1} && \text{changement d'indice} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)} \binom{k-1}{n-1+1} && \text{question 2}
\end{aligned}$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall k \in [\![n, +\infty]\!], \quad \mathbb{P}(S_n = k) = \tbinom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}}$$

*

(c) En déduire, pour tout x de $]0;\ 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

RÉPONSE:

Par définition 'une probabilité et comme $S_n(\Omega) = [\![n;\ +\infty]\!]$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$$

donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n} = 1$$

donc

$$x^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = 1$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de }]0;\ 1[\text{ et pour tout entier naturel } n \text{ non nul } \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}}$$

*

(d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à `Scilab` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

RÉPONSE:

```
n=input('entrez une valeur de n supérieure à 1:')
S=sum(grand(1,n,'geom',x))
disp(S)
```

*

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0;\ 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ \ln\ p}$$

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

RÉPONSE:

Comme $p \in\ ]0;\ 1[\ \ln(p) < 0$ les autres termes étant positifs

$$\boxed{\text{La suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est à termes positifs.}}$$

*

(b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} u_k &= \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{q^k}{k\ \ln\ p} \\
&= -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k} \\
&= -\frac{1}{\ln p}\left(-\ln(1-(1-p))\right)
\end{aligned}$$

La convergence et la somme étant obtenue grace à la question Partie I.1.d

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1.}$$

*

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = u_k$$

2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

RÉPONSE:

Les termes étant tous positifs la convergence absolue se confond avec la convergence.*
Sous réserve de convergence

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} -k\frac{q^k}{k\ \ln\ p} \\
&= -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \\
&= -\frac{q}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= -\frac{q}{\ln p}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k && \text{changement d'indice}
\end{aligned}$$

La série géométrique converge et

$$\boxed{E(X) = \frac{q}{\ln p(q-1)}}$$

*

(b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $V(X) = -\frac{q(q + \ln\, p)}{(p\, \ln\, p)^2}$.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence (absolue)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 u_k && \text{th de transfert} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} -k^2 \frac{q^k}{k\, \ln\, p} \\ &= -\frac{q}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} \end{aligned}$$

La série dérivée de la série géométrique converge donc

$$E(X^2) = -\frac{q}{(1-q)^2 \ln p}$$

donc d'après la formule de Koening Huygens X admet une variance et

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= -\frac{q}{(1-q)^2 \ln p} - \left(\frac{q}{\ln p(q-1)}\right)^2 \\ &= -\frac{q}{(1-q)^2 \ln p} - \frac{q^2}{(\ln p(q-1))^2} \\ &= -\frac{q \ln p}{((1-q)\ln p)^2} - \frac{q^2}{(\ln p(q-1))^2} \\ &= -\frac{q \ln p}{(p \ln p)^2} - \frac{q^2}{(p \ln p)^2} \\ &= -\frac{q^2 + q \ln p +}{(p \ln p)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{X \text{ possède une variance et } V(X) = -\frac{q(q + \ln\, p)}{(p\, \ln\, p)^2}\ .}$$

*

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $(X = k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

(a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln\, p}$$

RÉPONSE:

Une loi binomiale étant à valeur dans $[\![0,\, n]\!]$ et ici n peut prendre toute les valeurs prises par X *i.e.* $\mathbb{N}^*$

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P_(X=k)(Y=0) && \text{proba totales}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\binom{k}{0}p^0(1-p)^k && \text{loi binomiale}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{q^k}{k\ln p}\binom{k}{0}p^0(1-p)^k\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{q^k}{k\ln p}p^0(1-p)^k\\
&= -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q(1-p)^k}{k}\\
&= +\frac{1}{\ln p}\ln\left(1-(1-p)(1-p)\right)) && \text{question I.1.d}\\
&= \frac{1}{\ln p}\ln\left(1-1+2p-p^2\right)\\
&= \frac{1}{\ln p}\ln\left(2p-p^2\right)\\
&= \frac{1}{\ln p}\left(\ln(p)+\ln(2-p)\right)\\
&= \frac{1}{\ln p}\left(\ln(p)+\ln(2-1+q)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln\, p}}$$

*

(b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}(Y = n) = -\frac{p^n q^n}{n\,\ln\, p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}.$$

En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :

$$\mathbb{P}(Y=n) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n \ln p}$$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{k}{n}}{k} &= \frac{\frac{k!}{n!(k-n)!}}{k} \\
&= \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!} \\
&= \frac{(k-1)!}{n(n-1)!(k-1-(n-1)!} \\
&= \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (k,n) \text{ de } \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) P_{X=k}(Y=n) && \text{proba totales} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) P_{X=k}(Y=n) && \text{support} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} && \text{loi binomiale} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{q^k}{k \ln p} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} && \text{loi de } X \\
&= -\frac{p^n}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \binom{k}{n} q^k (q)^{k-n} \\
&= -\frac{p^n q^n}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \binom{k}{n} q^{2k-2n} \\
&= -\frac{p^n q^n}{\ln p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n} && \text{calcul précédent}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=n) = -\frac{p^n q^n}{n \ln p} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}.}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n} &= \frac{1}{(1-q^2)^n} \\ &= \frac{1}{(1-(1-p)^2)^n} \\ &= \frac{1}{(1-1+2p-p^2)^n} \\ &= \frac{1}{p^n(2-p)^n} \\ &= \frac{1}{p^n(1+q)^n}\end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer que

$$\boxed{\mathbb{P}\,(Y=n) = -\frac{q^n}{n\,(1+q)^n\ \ln\, p}}$$

∗

(c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.

RÉPONSE:

□

∗

(d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln\, p$ et q.

RÉPONSE:

□

∗

(e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $V(Y) = -\dfrac{q(q+(1+q)\ln\, p)}{(\ln\, p)^2}$.

RÉPONSE:

□

*