ESSEC2 2010 - ECE

L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service...) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour toute variable aléatoire Y, on notera $E(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

On adoptera les conventions suivantes. On dira qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = P(T \leqslant t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dérivable à droite en 0. On conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

I Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\mu (\mu > 0)$ si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ.
   (a) Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

RÉPONSE:

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\mu} \text{ et } V(X) = \frac{1}{\mu^2}}$$

*

   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, X^n admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre $E(X^{n+1})$ et $E(X^n)$ pour tout entier naturel n. *Indication : On pourra effectuer une intégration par parties*

RÉPONSE:

Soit n un entier, sous réserve de convergence absolue , grace au théorème de transfert

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n \mu \mathrm{e}^{-\mu x} \, \mathrm{d}x$$

Comme l'intégrande est positive, la convergence absolue se confond avec la convergence.
On a

$$\frac{x^n \mu \mathrm{e}^{-\mu t}}{\frac{1}{x}^2} = x^{n+2} \mu \mathrm{e}^{-\mu x}$$

comme $-mu < 0$, d'après le théorème des croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n \mu \mathrm{e}^{-\mu t}}{\frac{1}{x}^2} = 0$$

ce qui démontre

$$x^n \mu \mathrm{e}^{-\mu t} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente (2>1), en utilisant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions à valeurs positives

$$\int_1^{+\infty} x^n \mu \mathrm{e}^{-\mu x} \, \mathrm{d}x \text{ converge}$$

Comme de plus l'intégrande est continue sur le **segment** $[0; 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \mu \mathrm{e}^{-\mu x} \, \mathrm{d}x$ n'est pas impropre .

$$\boxed{X \text{ admet des moments de tout ordre.}}$$

On pose pour x réel

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & u'(x) &= (n+1)x^n \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-\mu x} v'(x) && &= \mu \mathrm{e}^{-\mu x} \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
Soit $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1} \mathrm{e}^{-mux} \, \mathrm{d}x &= \int_0^A u(x) v'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_0^A - \int_0^A u'(x) v(x) \, \mathrm{d}x && \text{intégration par parties} \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\mu x} x^{n+1}\right]_0^A + (n+1) \int_0^A x^n \mathrm{e}^{-\mu x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-\mu A} A^{n+1} + \frac{n+1}{\mu} \int_0^A \mu x^n \mathrm{e}^{-\mu x} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

D'après le théorèmes des croisssances comparées

$$\lim_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{-\mu A} A^{n+1} = 0$$

Toutes les intégrales étnt convergentes

$$E(X^{n+1} = \frac{n+1}{\mu} E(X^n)$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ E(X^{n+1} = \frac{n+1}{\mu} E(X^n)}$$

*

(c) En déduire $E(X^n)$ pour tout $n > 0$.

<u>RÉPONSE:</u>

Après avoir cherché au brouillon nous proposons de démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$$

- **Initialisation**
  Par définition d'une densité
  $$E(X^0) = \int_0^{+\infty} \mu \mathrm{e}^{-\mu x} \,\mathrm{d}x = 1$$
  Et comme $0! = 1$ et $\mu^0 = 1$ on a bien
  $$E(X^0) = \frac{0!}{\mu^0}$$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir montré que
  $$E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$$
  alors
  $$\begin{aligned} E(X^{n+1} &= \frac{n+1}{\mu} E(X^n) && \text{question précédente} \\ &= \frac{n+1}{\mu} \times \frac{n!}{\mu^n} && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+1)!}{\mu^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}\ E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}}$$

*

(d) Retrouver la valeur de $V(X)$ à l'aide de la question précédente.

RÉPONSE:

On a bien $E(X^1) = \dfrac{1!}{\mu^1} = \dfrac{1}{\mu}$
et en utilisant la formule de Koening-Huygens , X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

*

2. **Propriété caractéristique**

(a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $\mathbb{P}(X > x)$ est non nul.
Montrer que pour tous réels positifs x et y,

$$\mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y)$$

RÉPONSE:

On a

$$P(X > \alpha) = 1 - P(X \leqslant \alpha) \qquad = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu x}\right) \text{ cours, fonction de répartition} \qquad = \mathrm{e}^{-\mu x}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y) &= \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x + y])}{\mathbb{P}(X > y)} && \text{définition} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > y)} && \text{car } [X > x + y] \subset [X > x]\ (y \leqslant 0) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mu(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\mu y}} && \text{remarque précédente} \\
&= \mathrm{e}^{-\mu y} \\
&= \mathbb{P}(X > y) && \text{remarque précédente}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels positifs } x \text{ et } y,\ \mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y)}$$

$*$

(b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y,

$$\mathbb{P}_{[X>x]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > y)$$

RÉPONSE:

$\square$

$*$

i. Soit $R(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Justifier que $R(x)$ est non nul pour tout réel positif.

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x) &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x) \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{définition d'une densité} \\
&= \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{relation de Chasles}
\end{aligned}$$

et comme f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, cette intégrale est strictement positive.

$$\boxed{R(x) \text{ est non nul pour tout réel positif.}}$$

Remarque :

$*$

ii. On pose $\mu = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif, on a la relation $R'(x) + \mu R(x) = 0$.

RÉPONSE:

Soit x et y deux réels positifs

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X>x]}(X > x+y) &= \frac{\mathbb{P}([X>x]\cap[X>x+y])}{\mathbb{P}(X>x)} \\
&= \frac{[X>x+y])}{\mathbb{P}(X>x)} && \text{car } [X>x+y]\subset[X>x]
\end{aligned}$$

Avec l'hypothèse faite sur X on obtient

$$\mathbb{P}(X>x+y) = \mathbb{P}(X>x)\mathbb{P}(X>y)$$

Soit $h>0$

$$\begin{aligned}
\frac{R(x+h)-R(x)}{h} &= \frac{\mathbb{P}(X>x+h)-P(X>x)}{h} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X>x)\mathbb{P}(X>h)-P(X>x)}{h} && \text{remarque précédente} \\
&= \mathbb{P}(X>x)\frac{\mathbb{P}(X>h)-1}{h} \\
&= R(x)\frac{R(0+h)-R(0)}{h}
\end{aligned}$$

car $R(0)=\mathbb{P}(X>0)=1$
Quand h tend vers 0 (par valeurs positives) on obtient

$$R'(x) = R(x)R'(0)$$

et d'après les rappels de l'énoncé $R'(0) = -f(0)$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel positif, } R'(x)+\mu R(x) = 0.}$$

*

iii. Calculer la dérivée de $x \mapsto R(x)\mathrm{e}^{\mu x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

RÉPONSE:

R et une exponentielle étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$,la fonction $g\ :\ x\mapsto R(x)\mathrm{e}^{\mu x}$ l'est aussi et

$$\begin{aligned}
g'(x) &= R'(x)\mathrm{e}^{\mu x} + R(x)\mu\mathrm{e}^{\mu x} \\
&= \left(R'(x)+\mu R(x)\right)\mathrm{e}^{\mu x} \\
&= 0 && \text{question précédente}
\end{aligned}$$

*

iv. Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

RÉPONSE:

La fonction g est de dérivée nulle sur un intervalle, donc constante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x) = g(0) = R(0) \times 1 = 1$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad P(X > x) = \mathrm{e}^{-mux}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-mux}$$

ce qui démontre que la fonction de répartition de X est celle d'une loi exponentielle.

$\boxed{X \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \mu = f(0).}$

*

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2 .
   (a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la densité de la variable Y.

RÉPONSE:

Comme X_1 et X_2 sont à valeurs positives Y l'est aussi
Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant x) &= \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\mathbb{P}(X_2 \leqslant x) && X_1, X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}\right) && \text{cours} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R}\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x})(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

F_Y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ car constante et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et de fonctions exponentielles
De plus

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 0 = F_Y(0)$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}\right) = (1-1)(1-1)$$

la dernière égalité découlant de la continuité de l'exponentielle.
F_Y est donc continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ et Y admet bien une densité

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad f_y(x) = F_Y'(x)$$

donc
RÉPONSE:

$$\boxed{\text{pour } x \in \mathbb{R}^*,\ f_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 x} + \mu_2 \mathrm{e}^{-\mu_2 x} - (\mu_1 + \mu_2)\mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)x} & \end{cases}}$$

*

*

(b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z.

RÉPONSE:

Comme X_1 et X_2 sont à valeurs positives, Z est aussi à valeurs positives
Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > x) &= \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) && \text{indépendance} \\ &= (1 - \mathbb{P}(X_1 \leqslant x))(1 - \mathbb{P}(X_2 \leqslant x)) \\ &= \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\right)\right)\left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_2 x}\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\mathrm{e}^{-\mu_2 x} \\ &= \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)x} \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(Z \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(Z > x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)x}$$

En utilisant le support de Z on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + m_2$

$$\boxed{Z \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \mu_1 + \mu_2.}$$

*

II Fiabilité

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$R_T(t) = \mathbb{P}(T \geqslant t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

1. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
   La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbb{P}(t \leqslant T \leqslant t+h)$.
   Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction R_T.

RÉPONSE:

Soit $h > 0$ et $t \geqslant 0$ deux réels

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t \leqslant T \leqslant t+h) &= \int_t^{h+t} f_T(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_t^{+\infty} f_T(t)\,\mathrm{d}t + \int_{+\infty}^{h+t} f_T(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{Chasle (un peu limite du prgramme), toutes les intégrales conv} \\ &= R_T(t) - R_T(t+h)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La dégradation du système sur l'intervalle } [t, t+h] \text{ est } R_T(t) - R_T(t+h).}$$

*

2. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{P(t \leqslant T \leqslant t+h)}{h} = f_T(t)$$

RÉPONSE:

Soit $h > 0$ et $t \geqslant 0$ deux réels

$$\begin{aligned}\frac{P(t \leqslant T \leqslant t+h)}{h} = \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{h} \\ &= \frac{1 - F_T(t) - 1 + F_T(t+h)}{h} \\ &= \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h}\end{aligned}$$

en passant à la limite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{P(t \leqslant T \leqslant t+h)}{h} = F_T'(t) = f_T(t)$$

$$\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{P(t \leqslant T \leqslant t+h)}{h} = f_T(t)}$$

*

3. (a) Justifier que pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$

RÉPONSE:

Comme f_T est strcitement positive sur $\mathbb{R}_+$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ positif, } R_T(t) > 0.}$$

*

On appelle taux de défaillance la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

(b) Montrer que λ est la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$.

RÉPONSE:

λ est bien définie car R_T ne s'annule pas et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = -\ln\left(R_T(t)\right)$$

On a déjà vue que pour tout réels $x \in \mathbb{R}_+$

$$R_T'(x) = -f_T(x)$$

donc

donc par composition la fonction $\nabla \ : \ t \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$. est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\nabla'(t) &= -\frac{R'_T(t)}{R_T(t)}\\ &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda \text{ est la dérivée de la fonction } t \mapsto \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right).}$$

*

(c) Déduire l'expression de R_T en fonction de λ à l'aide d'une intégrale.

RÉPONSE:

En reprennant les notations précédente pour $t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln\left(\frac{1}{R_T(x)}\right)\right]_0^t$$

Comme $R_T(0) = 1$

$$\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)$$

donc

$$-\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(R_T(t)\right)$$

$$\boxed{\text{Pour } t \in \mathbb{R}\text{ , } R_T(t) = \exp\left(-\textstyle\int_0^t \lambda(x)\,\mathrm{d}x\right)}$$

*

4. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = \mathbb{P}(Z > t)$ pour $t \geqslant 0$.

   (a) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.

   Montrer que

   $$tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$$

   où v' désigne la dérivée de v.

RÉPONSE:

v est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions dérivables et pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$v'(t) = 1 \times R_Z(t) + tR'_Z(t) = R_Z(t) - tg(t)$$

$$\boxed{\text{Pour } t \in \mathbb{R}_+,\ tg(t) = R_Z(t) - v'(t)}$$

*

(b) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

RÉPONSE:

Comme on sait que Z admet une espérance

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui prouve que l'intégrale en question converge.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} v(t) &= tR_Z(t) \\ &= t\int_t^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_t^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x && \text{car } t \leqslant x \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{t} xg(x)\,\mathrm{d}x && \text{Chasle +espérance existe} \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant v(t) \leqslant \int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{t} xg(x)\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^{t} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$$

et en utilisant le théorème des encadrements

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} v(t) = 0.}$$

*

(c) En déduire que $E(Z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} R_Z(t)\,\mathrm{d}t$.

RÉPONSE:

Soit $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\int_0^t xg(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^t R_Z(x) - v'(x)\,\mathrm{d}x && \text{question 4.a}\\
&= \int_0^t R_Z(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^t v'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^t R_Z(x)\,\mathrm{d}x - v(t) + v(0)\\
&= \int_0^t R_Z(x)\,\mathrm{d}x - v(t) + 0 \times g(0) && \text{car } g \text{ continue en } 0
\end{aligned}$$

En passant à la limite et en utilisant la question 4b

$$\int_0^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} R_Z(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{E(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t)\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : les trois questions précédentes reviennent à faire une intégration par parties (dure)

*

5. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
On a donc, pour tout réel x positif

$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}(T_t > x) = \mathbb{P}_{[T>t]}(T > t + x)$$

(a) Montrer que, pour tout réel x positif,

$$R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$$

RÉPONSE:

On a

$$\begin{aligned}
R_{T_t}(x) &= \mathbb{P}_{[T>t]}(T > t + x) \\
&= \frac{\mathbb{P}([T > t] \cap [T > t + x])}{\mathbb{P}(T > t)} && \text{définiton} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T > t + x)}{\mathbb{P}(T > t)} && \text{car } [T > t + x] \subset [T > t] \\
&= \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)} && \text{définition de } R_T
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{P our tout réel } x \text{ positif, } R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}}$$

*

(b) En déduire que

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)du$$

RÉPONSE:

Remarque : on veut utiliser la question 4, pour cela il faudrait démontrer que T_t admait une densité (faisable) et que T_t admet une espérance (me semble trop dur sans indication, si le sujet était bien posé, cette partie aurait été intégrée dans la question 4.c) On admet donc ces deux résultats
D'après la question 4

$$\begin{aligned}
E(T_t) &= \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t + x)\,\mathrm{d}x && \text{car } R_T(t) \text{ est une constante} \\
&= \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\,\mathrm{d}u && \text{changement de variable } u = t + x
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)du}$$

*

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

6. (a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ. Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

RÉPONSE:

Pour t réel

$$R_T(t) = 1 - F_T(t)$$

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ réel } R_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-\mu t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

On a donc

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ réel } \lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

$*$

(b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i. Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

RÉPONSE:

Si les deux organes sont montés en série, alors système tombe en panne dès que l'un des organes tombe en panne, on étudie donc $\min(T_1, T_2)$. D'après la question I.3.b $\min(T_1, T_2)$ suit une loi géométrique de paramètre $\mu_1 + \mu_2$

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ réel } R_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \text{ et } \lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu_1 + \mu_2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

$*$

(c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i. Déterminer la fiabilité du système.

RÉPONSE:

On veut cette fois ci étudier $\max(T_1, T_2)$, d'après la question I.3.a ou nous avons calculer la fonction de répartition d'une telle loi

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ réel } R_{\max(T_1,T_2)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 t}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\mu_1 t}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

*

7. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par

$$\varphi_{n,\beta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(n-1)!}(\beta t)^{n-1}\mathrm{e}^{-\beta t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

(a) Vérifier que $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

RÉPONSE:

$\varphi_{n,\beta}$ est une fonction positive, et continue sauf éventuellement en 0 de plus, sous réserve de convergence

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{(n-1)!}(\beta t)^{n-1}\mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\beta^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\beta\mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!}E(X^{n-1}) && \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\beta) \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} && \text{question I.1.c} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{n,\beta} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

$*$

(b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$. Montrer que la fiabilité à la date t est

$$R_T(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

RÉPONSE:

La fonction R_T donnée est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit d'un polynome et d'une exponentielle. Et pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} R_T'(t) &= -\beta \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\beta(\beta t)^{k-1}}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\beta t}\left[-\beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta(\beta t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= \beta \mathrm{e}^{-\beta t}\left[-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta t)^k}{k!!} \right] && \text{changement d'indice dans le 2eme } \Sigma \\ &= \beta \mathrm{e}^{-\beta t} \frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} && \text{télescopage} \end{aligned}$$

On a donc

$$R_T'(t) = -\varphi_{n,\beta}$$

Donc la fonction R_T donnée est une primitive de $-\varphi_{n,\beta}$ sur $\mathbb{R}_+$, elle ne diffère de la fiabilité que par une constante, et comme $\mathrm{e}^{-\beta 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta 0)^k}{k!} = 1$

$$\boxed{\text{La fiabilité est } R_T(t) = \mathrm{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}}$$

$*$

8. Soit $\psi_{\beta,\eta}$ la fonction définie par

$$\psi_{\beta,\eta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-(t/\eta)^\beta} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\beta \geqslant 1, \eta > 0$

(a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

RÉPONSE:

La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
De plus pour $A \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\int_0^A \psi_{\beta,\eta}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \mathrm{e}^{-(t/\eta)^\beta}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-(t/\eta)^\beta}\right]_0^A \text{ on reconnait une dérivée "evidente"} \\ &= 1-\mathrm{e}^{-(A/\eta)^\beta}\end{aligned}$$

Comme $\eta > 0$ alors

$$\lim_{A\to+\infty} (A/\eta) = +\infty$$

comme $\beta > 0$

$$\lim_{A\to+\infty} -(A/\eta)^\beta = -\infty$$

et donc par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-(A/\eta)^\beta} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) = 1$$

$$\boxed{\psi_{\beta,\eta} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

*

(b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$. Déterminer la fiabilité $R_T(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t.

RÉPONSE:

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, d'après les calculs qui précèdent

$$\int_0^t \psi_{\beta,\eta}(x)\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-(t/\eta)^\beta}$$

$$\boxed{\text{Pour } t \text{ positif } R_T(t) = \mathrm{e}^{-(t/\eta)^\beta} \text{ et } \lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}}$$

*

(c) Étudier $\lim_{t \to +\infty} \lambda(t)$ en fonction de la valeur de β.

RÉPONSE:

Si $\beta > 1$ la fiabilité tend vers $+\infty$, si $\beta < 1$ elle tend vers 0, dans le cas d'égalité la fiabilité est constante égale à $\dfrac{beta}{n}$.
La condition $\beta \geqslant 1$ de l'énoncé semble être une erreur.

*

III Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0;\, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.

On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $N_s \leqslant N_t$.

On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes

- $N_0 = 0$ et $0 < P(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \dots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants)
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires)
- $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{P(N_h > 1)}{h} = 0$

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout s dans $[0;\, 1]$, $G_u(s) = E(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

1. (a) Justifier que pour tout $u \geqslant 0$, $G_u(s)$ existe pour tout s dans $[0;\, 1]$ et qu'on a, pour tout s dans $[0;\, 1]$, $G_u(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k$.

RÉPONSE:

Soit u positifs fixé, d'après le théorème de transfert et sous réserve de convergence (absolue car les termes sont positifs)

$$\begin{aligned} G_u(s) &= E(s^{N_u}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(N_u = k) && \text{car } N_u \text{ est à valeurs entières} \end{aligned}$$

or pour k entier comme $s \in [0;\, 1]$

$$\left| s^k \mathbb{P}(N_u = k) \right| \leqslant \mathbb{P}(N_u = k)$$

et comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_u = k)$ converge (et vaut 1), d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs la série $\sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(N_u = k)$ converge absolument.
Le théorème de transfert assure donc que

$$\boxed{G_u(s) = E(s^{N_u}) \text{ existe et vaut } \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(N_u = k).}$$

*

(b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s)$$

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
G_{u+v}(s) &= E\left(s^{N_{u+v}}\right) \\
&= E\left(s^{N_{u+v} - N_v + N_v}\right) \\
&= E\left(s^{N_{u+v} - N_v}\right) E\left(s^{N_v}\right) && \text{l'axiome 2 et le lemme des coalitions assurent l'indépendance} \\
&= E\left(s^{N_u}\right) E\left(s^{N_v}\right) && \text{Axiome 3 : } N_{u+v} - N_v \text{ et } N_{u+v-v} \text{ ont même loi} \\
&= G_u(s) G_v(s)
\end{aligned}$$

$$\boxed{G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s)}$$

*

2. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.
   (a) Montrer que $G_1(s) > 0$.
   On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.

RÉPONSE:

D'après la question III.1.a

$$G_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1^k \mathbb{P}(N_1 = k)$$

or tous les termes de la somme sont strictement positifs (Axiome 1) donc

$$G_1(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1^k \mathbb{P}(N_1 = k) > 0$$

$$\boxed{G_1(s) > 0}$$

*

(b) Montrer que $\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

RÉPONSE:

De la question III.1.b, on déduit (par recurrence) que pour tout réel $u > 0$ et pour tout entier[1] k

$$G_{ku}(s) = (G_u(s))^k$$

Donc

$$\begin{aligned}\psi(k) &= G_k(s) \\ &= (G_1(s))^k \\ &= \left(\mathrm{e}^{-\theta(s)}\right)^k \\ &= \left(\mathrm{e}^{-k\theta(s)}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$$

*

(c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{1/q}(s)$, montrer que $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

RÉPONSE:

On a d'après III.1.a

$$\left(G_{1/q}(s)\right)^q = G_{1/q \times q}(s) = G_1(s)$$

ce qui démontre

$$(\psi(1/q))^k = \mathrm{e}^{-\theta(s)}$$

et donc

$$\psi(1/q) = \left((\psi(1/q))^k\right)^{1/q} = \mathrm{e}^{-\dfrac{1}{q}\theta(s)}$$

1. $G_0(s) = 1$ par application de l'axiome 1

$$\boxed{\text{Pour } q \text{ un entier naturel non nul. } \psi\left(\frac{1}{q}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.}$$

*

(d) Montrer que si p est entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \frac{p}{q}$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= G_r(s) \\
&= G_{p/q}(s) \\
&= \left(G_{1/q}(s)\right)^p && \text{III.1.a} \\
&= (\psi(1/q))^p \\
&= \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}\right)^p && \text{question précédente} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{p}{q}\theta(s)} \\
&= \mathrm{e}^{-r\theta(s)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}}$$

*

(e) Montrer que pour tout réel positif u, $G_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

RÉPONSE:

Me semble utiliser des notions hors programme

□

*

(f) En déduire que pour tout $s \in [0;\, 1]$, $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

RÉPONSE:

$$\frac{G_h(s)-1}{h} = \frac{\mathrm{e}^{-h\theta(s)} - \mathrm{e}^{-0\theta(s)}}{h}$$

Donc

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{G_h(s)-1}{h} = \zeta'(0)$$

où

$$\zeta t \mapsto \mathrm{e}^{-t\theta(s)}$$

est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La variable est t, $\theta(s)$ est une constante.

$$\zeta'(0) = -\theta(s)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } s \in [0;\ 1],\ \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{G_h(s)-1}{h} = -\theta(s)}$$

*

3. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0;\ 1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1).$$

RÉPONSE:

On a

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k) \qquad G_h(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(N_h = k)$$

donc

$$\begin{aligned}
G_h(s) - 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}(N_h = k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (s^k - 1)\mathbb{P}(N_h = k) \\
&= (s^0 - 1)\mathbb{P}(N_h = 0) + (s^1 - 1)\mathbb{P}(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} (s^k - 1)\mathbb{P}(N_h = k) \\
&= (1 - 1)\mathbb{P}(N_h = 0) + (s - 1)\mathbb{P}(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} (s^k - 1)\mathbb{P}(N_h = k)
\end{aligned}$$

Pour tout $s \in [0;\, 1]$, $G_h(s) - 1 = \mathbb{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)$.

*

4. Montrer que pour tout $s \in [0;\, 1]$, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0$

<u>RÉPONSE:</u>

On a

$$\left|\sum_{k=2}^{A} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)\right| \leqslant \sum_{k=2}^{A} \mathbb{P}(N_h = k)\left|(s^k - 1)\right| \sum_{k=2}^{A} \mathbb{P}(N_h = k)1$$

Donc en passant à la limite

$$0 \leqslant \left|\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)$$

donc

$$0 \leqslant \left|\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)\right| \leqslant \mathbb{P}(N > 1)$$

donc

$$0 \leqslant \left|\frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h}\right| \leqslant \frac{\mathbb{P}(N > 1)}{h}$$

Or d'après l'axiome A4

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\mathbb{P}(N > 1)}{h} = 0$$

D'après le théorème des encadrements

Pour $s \in [0;\, 1]$, $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0$

*

5. (a) En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0;\, 1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

RÉPONSE:

D'après la question III.3, pour tout $s \in [0;\, 1]$,

$$G_h(s) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1) = \mathbb{P}(N_h = 1)(s-1)$$

Donc

$$\frac{G_h(s) - 1}{h} - \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = \frac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h}(s-1)$$

En passant à la limite ($h \to 0$) et en utilisant les question 3 et 2.f

$$-\theta(s) - 0 = (s-1) \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h}$$

ce qui démontre le résultat voulu

*

(b) En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

RÉPONSE:

On a d'après III.1.a

$$G_1(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0^k \mathbb{P}(N_1 = k) = \mathbb{P}(N_1 = 0)$$

Or d'après l'axiome A1 $\mathbb{P}(N_1 =) < 0$ donc

$$\theta(0) = -\ln(G_1(0)) > 0$$

, comme $(1-s) > 0$, en utilisant le résultat de la question précédente

$$\boxed{\alpha > 0}$$

*

6. (a) On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0;\, 1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathrm{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

RÉPONSE:

La première égalité à déjà été prouvée en III.1.a

$$\begin{aligned}
G_u(s) &= \mathrm{e}^{-u(\theta(s))} \text{ D'après III.2.e} \\
&= \mathrm{e}^{-u(\alpha(1-s))} && \text{5.a} \\
&= \mathrm{e}^{-u\alpha}\mathrm{e}^{u\alpha s} \\
&= \mathrm{e}^{-u\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha u s)^k}{k!} && \text{série exponentielle} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-\alpha u}\frac{(\alpha u)^k}{k!}\right]s^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } u > 0. \text{ et } s \in [0;\, 1],\ G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{-\alpha u}\frac{(\alpha u)^k}{k!}\right]s^k}$$

*

(b) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

RÉPONSE:

Il faut identifier les coefficients dans les deux séries précédentes, c'est hors programme e est valide parce que les séries sont des séries entières.

□

*

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

7. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$. Comparer les événements $(T > t)$ et $(N_t = 0)$. En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

RÉPONSE:

La première panne arrive après le temps t si et seulement si au temps t il y a eu 0 pann :

$$\boxed{\text{Pour } t \in \mathbb{R}_+^*,\ [N_t = 0] = [T > t]}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leqslant t) &= 1 - \mathbb{P}(T > t) \\
&= 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^0}{0!} && \text{question précédente} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

On reconnait une fonction de répartition de (α)

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)}$$

$*$

8. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.
   (a) Montrer que $\tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

RÉPONSE:

N_{t+h} représente le nombre d'avaries survenues dans l'intervalle $f0t + h$ auquel on soustrait le nombre N_t d'avaries survenues dans $]0;\, t]$.

$$\boxed{\tilde{N}_h \text{ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps }]t, t+h]}$$

$*$

   (b) Montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

RÉPONSE:

$\square$

$*$

   (c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre α.

RÉPONSE:

□

*

(d) En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.

RÉPONSE:

□

*