

Convergence et probabilités.

ECE 2 Lycée international de Valbonne



14 mars 2020

Table des matières

I	Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.	2
I.1	Inégalités	2
I.2	Loi faible des grands nombres	2
II	Convergence en loi	3
II.1	Définitions	3
II.2	Exemple à connaître d'approximation	4
III	Théorème central limite	6
III.1	Préliminaires	6
III.2	Le théorème et ses applications	8

I Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

I.1 Inégalités

Théorème 1 (Markov).

Si X est une variable aléatoire réelle à **valeurs positives** admettant une espérance alors

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Théorème 2 (Bienaymé-Tchebichev).

Soit X une variable aléatoire réelle **admettant un moment d'ordre 2** alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

I.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 3 (Loi faible des grands nombres).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Alors

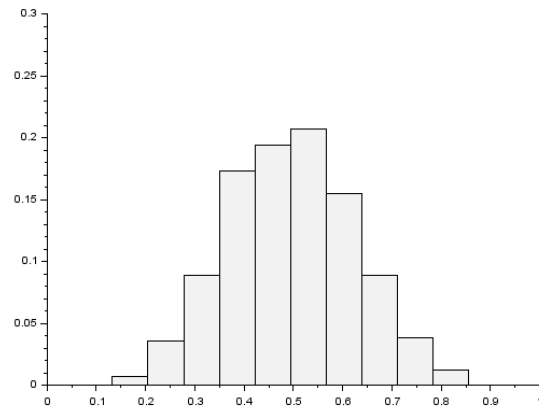
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$$

programme SCILAB à compléter .

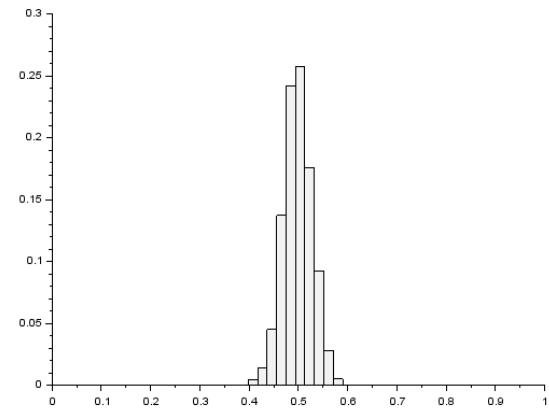
On cherche à illustrer la loi des faibles des grands nombres. On va commencer par calculer la moyenne de la simulation de n variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0; 1[$. Puis on va recommencer cette expérience un grand nombre de fois et on va visualiser ces résultats à l'aide de `histplot`

```
n=100 // celui qui apparait dans le théorème
L =1000 // nombre de fois ou on repète l'opération
Moyennes=zeros(L)
for i=1:L
    Moyennes(i)=sum(rand(1,n))/n
end

histplot(10,Moyennes,rect=[0,0,1,0.3])
```



(a) $n = 10$



(b) $n = 1000$

FIGURE 1 – Deux illustrations de la loi des grands nombres avec la loi uniforme

Une version plus idiomatique

```
n=1000 // celui qui apparait dans le théorème
L =100000 // nombre de fois ou on repète l'opération
Tirages =rand(L,n)
Moyennes=sum(Tirages, 'c')/n
histplot(10,Moyennes)
```

Exercice 1.

Modifier le programme précédent pour qu'il simule la même expérience aléatoire avec la loi exponentielle de paramètre 2.

II Convergence en loi

II.1 Définitions

Définition 1 (convergence en loi).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire.
 On note F_n la fonction de répartition de X_n et F_X celle de X .
 On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si et seulement si pour tout réel x où F_X est continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F_X(x)$$

On note alors

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$



Attention : Il faut bien faire attention aux x et n .

Caractérisation pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 4.

On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à **valeurs dans $\mathbb{Z}$** et que X est une variable aléatoire à **valeurs dans $\mathbb{Z}$** . Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

On a remplacé un critère sur les fonctions de répartition par un critère sur les lois de probabilités!

II.2 Exemple à connaître d'approximation

Théorème 5.

Soit λ un paramètre réel fixé et strictement positif.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

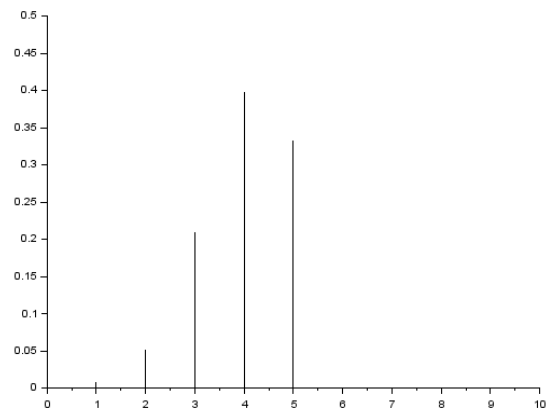
Programme Scilab à compléter

```
//Approximation de la loi de POisson
```

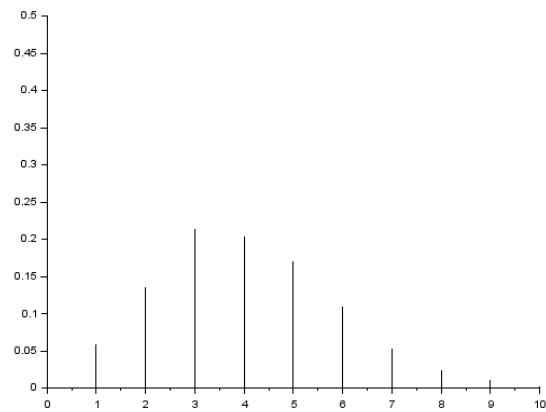
```
lambda=4
```

```
n=5 // le deuxieme parametre
```

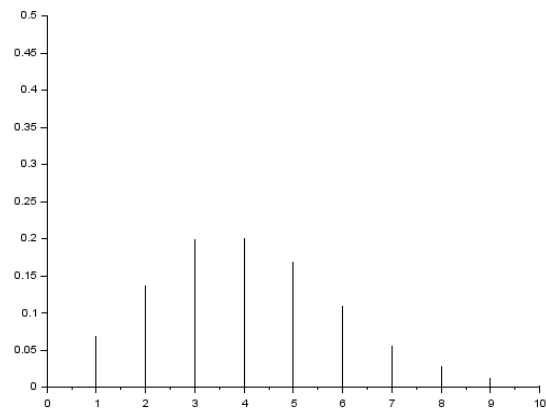
```
L=10000 //nombre de répétitions
```



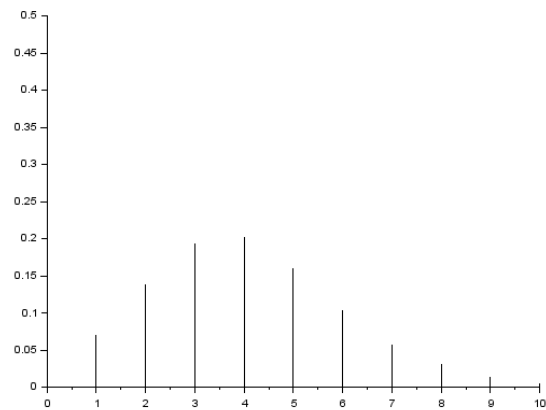
(a) $\mathcal{B}(5, 4/5)$



(b) $\mathcal{B}(25, 4/25)$



(c) $\mathcal{B}(50, 4/50)$



(d) $\mathcal{P}(4)$

FIGURE 2 – Convergence des lois binomiales $\mathcal{B}(n, 4/n)$ vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$

```

bi=grand(1,L,'bin',n,lambda/n)
eff=tabul(bi)
plot2d3(eff(:,1),eff(:,2)/L,rect=[0,0,10,0.5])

//pour comparaison
pois=grand(1,L,'poi',lambda)
eff=tabul(pois)
plot2d3(eff(:,1),eff(:,2)/L,rect=[0,0,10,0.5])

```

III Théorème central limite

Cette partie justifie pourquoi la loi normale (centrée-réduite) est si importante.

III.1 Préliminaires

Proposition 1 (transformation affine d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$).
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et si a et b sont deux réel $a > 0$ et b deux réels alors $Y = aX + b$

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$$

Méthode pour centrer et réduire une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 (elle admet donc une espérance μ et un écart-type σ). en posant

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On constate que

$$E(X^*) = 0 \quad V(X^*) = 1$$

Donc X^* est une variable aléatoire réduite et centrée!

Soit X une variable aléatoire admettant un écart type σ et une espérance μ alors si on pose

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

cette variable aléatoire vérifie

$$E(X^*) = 0 \quad V(X^*) = 1$$

X^* est **centrée** et **réduite** .

Démonstration :

En utilisant la linéarité de l'espérance

$$E(X) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

et en utilisant la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$

$$V(X) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$$

5

En combinant la stabilité des lois normales pour les transformations affines et la remarque précédente, on peut transformer toute loi normale en une loi normale réduite et centrée.

Méthode pour se ramener à une loi normale réduite-centrée.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on pose

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

D'après les résultats précédents

$$X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Réciproquement on peut écrire

$$X = \sigma X^* + \mu$$

Exemple : Utilisation des tables de la loi normale On va utiliser cette table <https://www.math.u-bordeaux.fr/mchabano/Tab0.pdf> qui donne les valeurs de Φ , fonction de répartition de la loi normale, pour les réels positifs. On considère

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 4)$$

et on voudrait avoir une approximation de

$$\mathbb{P}(3 \leq X \leq 4)$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(3 \leq X \leq 4) &= \mathbb{P}(-1 \leq X - 2 \leq 2) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X^* \leq 1\right) \\
 &= \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) && \text{définition de la fonction de répartition} \\
 &\approx 0,8413 - 0,6915 && \text{En lisant sur une table} \\
 &\approx 0,1498
 \end{aligned}$$

Exercice 2.

Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 3)$, donner une approximation de $\mathbb{P}(1 \leq X \leq \sqrt{3})$ On donne $1/\sqrt{3} \approx 0,577$.

Cas d'une moyenne Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même espérance μ et de même écart-type σ . On pose

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

alors la variable aléatoire centrée et réduite associée est

$$\overline{X}_n^* = \sqrt{n} \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que

$$E(\overline{X}_n) = \mu \qquad V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

5

III.2 Le théorème et ses applications

Théorème 6 (Théorème limite central).

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites

$$\overline{X}_n^* = \sqrt{n} \left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \right)$$

associées aux variables

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq \overline{X_n} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Code SCILAB à compléter

```
n=50 // celui qui apparait dans la limite
L =1000000 // nombre de fois ou on repète l'opération
sigma=sqrt(1./12)
moyenne=1/2
Xbarre=zeros(L)
for i=1:L
Xbarre(i)=sum(rand(1,n))/n
end
Xbarretoile=sqrt(n)*((Xbarre-moyenne)/sigma)
```

un exemple On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculons (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

On note X_i l'intervalle exprimé en minutes séparant le véhicule $i - 1$ du véhicule i , X_1 représentant l'intervalle entre le début de la journée et le temps de passage de la première voiture.

Les $(X_i)_{i \geq 1}$ forment une suite de variable aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{30}$ et vérifient donc

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \quad E(X_i) = 30 \quad V(X_i) = 30^2 = 900 \quad \sigma_{X_i} = 30$$

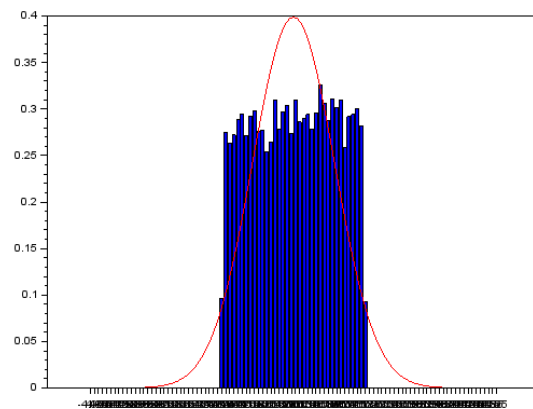
Le temps écoulé entre le début de la journée et le passage de la n ème voiture est donc

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

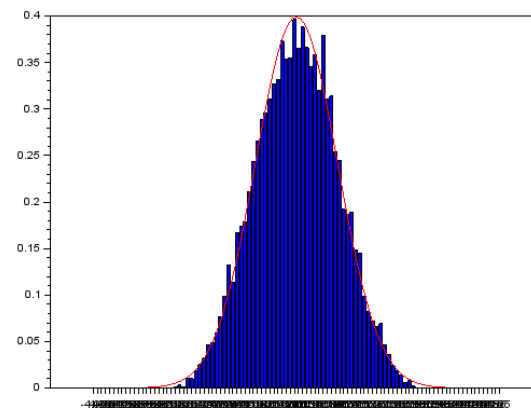
On cherche donc à déterminer

$$\mathbb{P}(S_{50} < T)$$

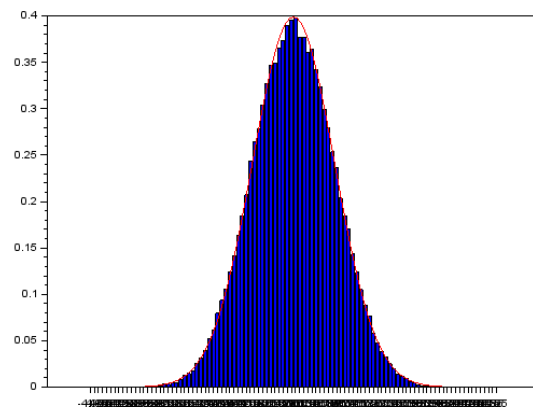
où $T = 24 * 60$ est la durée d'une journée exprimée en minutes



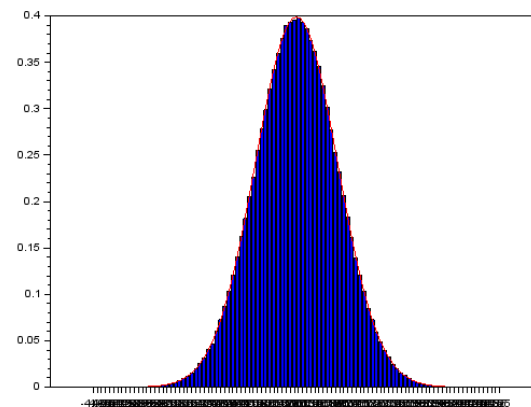
(a) $n = 1$



(b) $n = 3$



(c) $n = 8$



(d) $n = 50$

FIGURE 3 – Illustration du théorème central limite

On pose

$$\overline{X_{50}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50} = \frac{S_{50}}{50}$$

et la variable centrée réduite associée

$$\overline{X_{50}}^* = \sqrt{50} \frac{\overline{X_{50}} - 30}{30} = \sqrt{50} \frac{S_{50} - 30 \times 50}{30 \times 50} = \frac{S_{50} - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}$$

On cherche donc à estimer la probabilité équivalente

$$p \left(\overline{X_{50}}^* \leq \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} \right)$$

D'après le théorème central limite, on peut faire l'approximation suivante

$$p \left(\overline{X_{50}}^* \leq \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} \right) = \Phi \left(\frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} \right)$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} &= \frac{24 * 60 - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} \\ &= \frac{24 * 2 - \times 50}{\sqrt{50}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{50}} \\ &\approx -0.283 \end{aligned}$$

$$\Phi(-0.283) = 1 - \Phi(0.283) \approx 1 - 0.61 \approx 0.39$$

La probabilité qu'il y ai moins de 50 voitures est environ 0.39