Relations de comparaisons entre suites et fonctions

ECE 2 Lycée international de Valbonne

15 septembre 2020

Table des matières

I Comparaison de fonctions

Dans la suite a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, et toutes les fonctions étudiées sont définies au voisinage de a.

I.1 Négligeabilité.

Définition 1 (relation de négligeabilité)**.**
On dit que f est négligeable *devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une application ϵ définie au voisinage de a telle que :*

- $f(x) = g(x)\epsilon(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

On note alors :

$$f \underset{a}{=} o\left(g\right)$$

On peut aussi noter

$$f = o\left(g\right) \qquad \textit{au voisinage de } a$$

Et on dit« f est une petit "o" de g » .

En pratique pour montrer qu'une application est négligeable au voisinage d'un point on utilisera le résultat suivant :

Théorème 1.
Si f et g sont deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$ telles que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini au voisinage de a (sans être forcément défini en a).

$$\boxed{f \underset{a}{=} o\left(g\right) \textit{ si et seulement si } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Exemple :

- $x \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right)$.
- $\ln x \underset{+\infty}{=} o\left(\sqrt{x}\right)$.
- $x^3 \underset{+\infty}{=} o\left(2^x\right)$.
- $x^6 \underset{0}{=} o\left(x\right)$.

- $\dfrac{x^3}{x-1} \underset{0}{=} o\left(x^2\right)$.
- $\dfrac{x^3}{x-1} \underset{\infty}{=} o\left(x^3\right)$.
- $x^2 + \ln x = x^2 + o\left(x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ au voisinage de 0.

Théorème 2 (Théorème des croissances comparées)**.**
Reécrire les limites classiques suivantes sous forme de o.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *donc* $\ln(x) = o(x)$ *au voisinage de* $+\infty$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ *donc…*
3. *Pour* $\alpha > 0$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ *donc …*
4. *Pour* $\alpha > 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ *donc …*
5. *Pour* $\alpha > 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ *donc …*
6. *Si* $\alpha < \beta$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = 0$ *donc …*
7. *Si* $\alpha < \beta$ *alors* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \ldots\ldots$ *donc …*

Proposition 1 (Propriétés de la relation de négligeabilité.)**.**
f, g, h et k étant des applications définies sur un intervalle I.

- ***Transitivité** :*
  Si $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $g \underset{a}{=} o(h)$ *alors* $f \underset{a}{=} o(h)$.
- ***Combinaison linéaire** :*
  Soient $f \underset{a}{=} o(g)$ *et* $h \underset{a}{=} o(g)$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *alors* $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} o(g)$.

Exercice : Démontrer les propriétés suivantes

1. $f \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
2. Montrer que si $f \underset{a}{=} o(g)$ et que l'application α est un réel , alors $\alpha f \underset{a}{=} o(g)$.
3. La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\text{Si } f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } h \underset{a}{=} o(k) \text{ alors } f + h \underset{a}{=} o(g+k).$$

I.2 Équivalence

Définition 2 (équivalence entre deux fonctions)**.**
On dit que f est équivalente *à g au voisinage de a si et seulement si il existe une application $\epsilon(x)$ définie au voisinage de a telle que :*

- $f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$.
- $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

On note alors :

$$f \underset{a}{\sim} g$$

ou

$$f \sim g \qquad \text{au voisinage de } a$$

En pratique, pour montrer que deux applications sont équivalentes au voisinage d'un point on utilisera une des deux définitions équivalentes suivantes

Théorème 3 (Caractérisation de la relation de comparaison)**.**

- *Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini au voisinage de a (sans être forcément défini en a).*

$$f \underset{a}{\sim} g \text{ si et seulement si } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- *$f \sim_a g$ si et seulement si $f - g = \underset{a}{o}(g)$.*

Exemple :

- $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$.
- $x^2 + x \sim_0 x$.
- $x^2 + \ln x \sim_{+\infty} x^2$.
- $x^2 + \ln x \sim_0 \ln x$.

Théorème 4 (Équivalents classiques)**.** *1. On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc, au voisinage de 0, $e^x - 1 \sim x$*

2. *On a* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ *donc, au voisinage de, …*
3. *On a* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=$ …. *donc, au voisinage de …,*

Proposition 2 (Propriétés de la relation d'équivalence)**.**
f, g, h et k étant des applications définies sur un intervalle I, on a les résultats suivants.

- ***Symétrie*** *:*
  Si $\underset{a}{\sim} h$ *alors* $h \underset{a}{\sim} f$.
- ***Reflexivité*** *:*
  $f \underset{a}{\sim} f$.
- ***Transitivité*** *:*
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h$ *alors* $f \underset{a}{\sim} h$.
- ***Multiplication****. :*
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $h \underset{a}{\sim} k$ *alors* $fh \underset{a}{\sim} gk$.
- ***Quotient*** *:*
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $h \underset{a}{\sim} k$ *alors* $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\sim} \dfrac{g}{k}$.
- ***Puissance*** *:*
  Si $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *alors* $f^n \underset{a}{\sim} g^n$.

Attention : Vérifier à l'aide d'un contre exemple que l'on ne peut pas, en général, additionner des équivalents entre eux ou les composer à gauche par une application.

Proposition 3 (Limites et équivalents)**.**
Si $f \sim_a h$ *et si* $\lim_a f = \ell$ *(réel ou infinie) alors* $\lim_a h = \ell$.

Méthode Pour calculer la limite de f en a, on peut commencer par trouver un équivalent g, dont la limite est beaucoup plus aisée à calculer. Puis on conclu en utilisant que f et g ont même limite.

Exercice : Calculer, à l'aide d'équivalents la limite de $\frac{(\ln(1+x))}{(e^x-1)^2}$ en 0^+.

Attention : Les affirmations $f \sim_a h$ et $\lim_a f - g = 0$ n'ont pas de lien évident entre elles. Donner des exemples !

II Développements limités

II.1 Développement limité à l'ordre 1

Définition 3 (au voisinage de 0)**.**
On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$$f(x) = a + bx + o(x) \qquad \textit{Au voisinage de } 0$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = a + bx + x\varepsilon(x)\text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exercice : Dans ce cas là que vaut $\lim_0 f(x)$?

Définition 4 (cas général)**.**
On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \textit{Au voisinage de } 0$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)\text{avec} \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

II.2 Développement limité à l'ordre 2

Définition 5 (au voisinage de 0)**.**
On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro si et seulement si il existe trois réels a et b et c tels que

$$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2) \qquad \textit{Au voisinage de } 0$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = a + bx + cx^2 + x^2\varepsilon(x)\text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Définition 6 (cas général)**.**
On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de x_0 si et seulement si il existe trois x réels a et b et c tels que

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \qquad \textit{Au voisinage de } 0$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0)^2\varepsilon(x)\text{avec} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

⚠ **Attention :** Si il existe un développement limité celui ci est unique.

II.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 5 (au voisinage de 0)**.**
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 alors au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 alors au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + o(x^2)$$

Théorème 6 (Cas général)**.**
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0 alors au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 alors au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(x_0) + o((x - x_0)^2)$$

II.4 Relation entre développements limités, équivalents et dérivées

Nous énonçons les théorèmes au voisinage de 0 à vous de les adapter pour des développements limités au voisinage de x_0.

Théorème 7 (Réduction d'ordre)**.**
Si $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ au voisinage de zéro alors $f(x) = a + bx + o(x)$ au voisinage de zéro.

Théorème 8 (D'un développement limité à un équivalent)**.**
Si $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ au voisinage de zéro

1. *Si $a \neq 0$ alors $f(x) \sim a$ au voisinage de zéro*
2. *Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $f(x) \sim bx$ au voisinage de zéro*

3. *Si $a = 0$ et $b = 0$ et $c \neq 0$ alors $f(x) \sim cx^2$ au voisinage de zéro*

Théorème 9 (D'un développement limité à la dérivée)**.**
Si $f(x) = a + bx + o(x)$ au voisinage de zéro, alors f est continue et dérivable en zéro et $f(0) = a$ et $f'(0) = b$

⚠ **Attention :** ce dernier théorème est faux à l'ordre 2

Annexes : formulaires

II.5 Les relations de comparaison à connaitre

Au voisinage de 0

1. Si $\alpha < \beta$ alors $x^\beta = o\left(x^\alpha\right)$
2. $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$
3. $\ln(1+x) \sim x$
4. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ avec $\alpha \neq 0$

Au voisinage de $+\infty$

1. Si $\alpha < \beta$ alors $x^\alpha = o\left(x^\beta\right)$
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $x^\alpha = o(\mathrm{e}^x)$
3. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ alors $ln(x) = o(x^\alpha)$

II.6 Les développements limités en 0 à connaitre

Les développements limités suivants doivent être connus.

1. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
2. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
3. Si α est un réel non nul $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Les développements limités suivants peuvent être retrouvés avec les formules précédentes mais il vaut mieux les connaître

1. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$
2. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$
3. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$