Relation de comparaison entre deux fonctions.

Calculs de limites et d'équivalents

Exercice 1 (calculs)**.**
Donner un équivalent simple des fonctions

1. $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en $+\infty$
2. $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en 0^+
3. $x+\sqrt{x}+\ln x$ en de $+\infty$
4. $x+\sqrt{x}+\ln x$ en 0^+
5. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x}$ en $+\infty$
6. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x}$ en 0^+

Exercice 2.
En calculant un équivalent puis les limites suivantes

1. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ en $+\infty$
2. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ en $+\infty$
3. $x\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)$ en $+\infty$
4. $\dfrac{x-\ln x}{x-\sqrt{x}}$ en $+\infty$ et en 0^+

Calculs de développements limités

Exercice 3.
Avec la formule de Taylor Young calculer les développements limités suivants, en 0 a l'ordre 2.

1. $x\mapsto \mathrm{e}^{-2x}$
2. $x\mapsto \sqrt{3+x}$
3. $x\mapsto x\ln(2+x)$
4. $x\mapsto (1+x)^x$

Exercice 4.
Sans utiliser la formule de Taylor Young calculez les développements limités suivants, en 0 a l'ordre 2

1. $x\mapsto \ln(1+2x)-x$
2. $x\mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x}$
3. $x\mapsto \mathrm{e}^x\ln(1-x)$
4. $x\mapsto \ln(2+x)$
5. $x\mapsto \sqrt{3+x}$
6. $x\mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^2}$
7. $x\mapsto \exp\left(\sqrt{1+x}\right)$
8. $x\mapsto \sqrt{1+\ln(1+x)}$
9. $x\mapsto \mathrm{e}^x-\dfrac{1}{1+x}$

Exercice 5 (Un peu plus dur)**.**
Sans utiliser la formule de Taylor Young calculez les développements limités suivants, en 0 a l'ordre 2

1. $x\mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\mathrm{e}^x}$
2. $x\mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$
3. $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}-\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$
4. $x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x\mathrm{e}^x}}$
5. $x\mapsto (1+\mathrm{e}^x)^\alpha$ où α est une constante.
6. $x\mapsto \ln\left(1+\mathrm{e}^{\sqrt{1+x)}}\right)-\exp(x)\ln(1+x)$

Exercice 6 (Perte d'ordre)**.**
Essayez de calculer les DL des fonctions suivantes, à l'ordre 2 En 0. Que se passe t 'il ?

1. $x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\ln(1+x)}$
2. $x\mapsto \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x}$
3. $x\mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x\mathrm{e}^x}$

Exercice 7 (Autre point que 0).
Calculer le développement limité des fonctions suivantes àl'ordre 2 au point indiqué

$x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 1	$x \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ en 2
$x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 1	
$x \mapsto \ln x$ en 2	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en 1

Applications

Exercice 8 (un prolongement de fonction).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue en 0
3. **Sans utiliser la formule de Taylor-Young** calculer un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est continue en 0
3. Avec un développement limité, trouver un équivalent en 0 de $f(x) - f(0)$.
4. En déduire la limite en 0 de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$
5. f est elle dérivable en 0 ?

Exercice 10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)x}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En utilisant les méthodes vues dans les deux exercices précédents, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 (tangente).
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$

1. Calculez un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe en 0 sous la forme $ax+b$.
3. En utilisant la question 1 calculer un DL de $f(x) - (ax+b)$ en 0. La courbe est elle en dessous ou au dessus de la tangente ?

Exercice 12 (asymptote).
On s'intéresse à la fonction définie par

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

1. En utilisant le DL de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 trouver des constantes a b et c telles qu'au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = a + bx + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Trouver une asymptote à la courbe en $+\infty$.
3. Sans nouveau calcul peut on savoir si la courbe est au dessus ou en dessous de l'asymptote ?

Exercice 13.
Refaire l'exercice 12 en posant cette fois $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}$

Exercice 14.
Refaire l'exercice 11 en posant cette fois $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$

Exercices théoriques

Exercice 15 (valeur absolue et racines)**.**
Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

1. On suppose qu'au voisinage de 0 on a $f \sim g$ Montrer alors que $|f| \sim |g|$.
2. On suppose qu'au voisinage de 0 on a $f = o(g)$, montrer que l'on a alors $|f| = o(|g|)$, $|f| = o(g)$ et $f = o(|g|)$
3. On suppose que f et g sont deux fonctions positives au voisnage de a et que $f \sim g$. Montrer que l'on a alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

Exercice 16 (Contre exemple)**.**

1. Montrer que l'on a $x^2 \sim_{+\infty} x^2+1$. A-t'on $\exp x^2 \sim_{+\infty} \exp(x^2+1)$?
2. Montrer qu'au voisinage de 0 $1+x \sim 1+x^2$ que se passe t il lorsque l'on compose avec $\ln$?