Sommes doubles

Le but de ce TD est de calculer des sommes doubles ou d'approximer des "séries doubles".

Exercice 1 (Exemples de base)**.**
On veut calculer

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \frac{1}{i+j}$$

Le « $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ »veut dire « i et j tous les deux compris entre 1 et 3. Il est naturel de pouvoir écrire

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{i+j} \right)$$

On écrit le programme suivant

```
function s=S1()
        s=0
        for i =1:3
                for j=1:3
                        s=s+1/(i+j)
                end
        end
endfunction

disp(S1())
```

1. Implémenter ce programme.
2. On peut aussi écrire
$$S_1 = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i+j} \right)$$
Écrire le programme associé à cette écriture. Les deux résultats sont ils bien identiques ?

Exercice 2.
On s'intéresse à

$$S_2 = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \frac{1}{i^2 + j^2}$$

1. Proposer deux écritures de la somme précédentes chacune avec deux symboles Σ.
2. Écrire deux s fonction associées à chacune de ses décompositions.

Exercice 3.

$$S_3 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{i^2 + j^2}$$

On peut écrire

$$S_3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{i^2 + j^2}$$

À Écrire une nouvelle fonction $S3(n)$ pour calculer cette somme .

1. En remarquant que les phrases « i est plus petit que j »et « j est plus grand que i »sont équivalentes, compléter la formule suivante
$$S_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=.....}^{...} \frac{i}{i^2 + j^2}$$
2. en déduire une nouvelle écriture
3. Écrire une nouvelle fonction $P(n)$ pour calculer
$$P = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$$

Exercice 4.
On veut calculer pour $t \in]-1;\, 1[$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \right)$$

1. Écrire une fonction Scilab $exo2(n, t)$ qui calcule la somme et utiliser cette fonction pour deviner quel résultat est juste : La limite vaut

- $\frac{1}{1+t^2}$
- $\frac{t}{1+t^2}$
- $\frac{t}{(1+t)^2}$
- $\frac{1}{(1+t)^2}$

2. Calculer la somme $\left(\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}(-1)^{i+j}t^{i+j+1}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$ puis la limite quand $n\to+\infty$.

Exercice 5.
On veut démontrer la formule suivante

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{1}{j^3}=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$$

1. Écrire une fonction $SD(n)$ qui calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j^3}$ et une fonction $SS(n)$ qui calcule $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}$. Se servir de ces deux fonctions pour "vérifier que" le résultat semble juste.
2. Vérifier le résultat par le calcul.

Exercice 6.
Après avoir "vérifié" le résultat à l'aide d'un programme scilab, montrer que

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}\frac{1}{(p+q^2+1)(p+q^2)}=\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}$$

indication on pourra chercher α et β tels que $\dfrac{\alpha}{p+q^2}+\dfrac{\alpha}{p+q^2+1}=\dfrac{1}{(p+q^2+1)(p+q^2)}$