INTÉGRATION

Calculs

Exercice 1.
En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3-t}}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t}$ (IPP)
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^t}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (IPP)

Exercice 2.
Comment intégrer une fraction :

1. Trouver deux constantes a et b telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
2. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle converge ou non, dans le cas convergent, donner la valeur de l'intégrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Exercice 3 (Résultat à connaître)**.**
À quelle condition sur le réel α, l'intégrale suivante est elle convergente, faire la démonstration.

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4 (bien choisir le découpage)**.**
Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-|t-1|}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-a|}$ où a est une constante.

Théorèmes de comparaisons

Exercice 5.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\sim$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: $\leqslant$ ou $\sim$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x$: utiliser $\sim$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 6.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 7 (introduction d'un $= o()$ bien choisi)**.**

1. Trouver un α bien choisi tel que $\dfrac{\ln x}{x^2} =_{+\infty} o(\dfrac{1}{x^\alpha})$ et tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. En déduire que la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Appliquer la même méthode à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}\ln x}\,\mathrm{d}x$.
4. en utilisant une négligeabilité devant $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ avec α bien choisi, montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^{x/100}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 8 (Plus dur)**.**
Étudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 9.
Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)+x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)(1+x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-\sqrt{t}}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-t}}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 10.
Pour chacune des intégrales suivantes étudier si elle converge ou non.

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Mélangés

Exercice 11 (Une récurrence).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose si l'intégrale converge

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{(\ln t)^n}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right)$.
3. En déduire que les intégrales sont convergentes.
4. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$
5. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
6. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12.
On cherche à déterminer si l'intégrale suivante converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)}$$

1. Trouver un équivalent simple de la fonction en $+\infty$.
2. En déduire que l'intégrale converge.
3. Trouver trois constantes a, b et c telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
$$\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$$
4. En déduire la valeur de l'intégrale

Exercice 13 (Changement de variable).
1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge, puis, avec le changement de variables $u = 1/t$, que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.
2. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

Pour aller plus loin

Exercice 14.
Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2+4x+1}\right)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 15 (Intégrales à paramètres (dur et long)).
Étudiez la convergence des intégrales suivantes en fonction du ou des paramètres :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ où $m \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln\left(1+x^\beta\right)\,\mathrm{d}x$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 16 (Un calcul un peu compliqué mais détaillé).
On pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in \,]0;\,1[\\ f(0) = 0 & \\ f(1) = 1 & \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

2. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est elle convergente ?
3. Soit $x \in]0;1[$. En posant $u = t^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
5. Montrer que pour tout $t \in \left[x^2; x\right]$, on a
$$\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
6. En déduire que
$$x^2\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant x\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
7. Trouver une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$
8. En utilisant le théorème des gendarmes montrer que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Exercice 17.
Soient $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $0 < x < y$. Démontrer que
$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,
$$\mathrm{e}^{-bz}\ln\frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az}\ln\frac{b}{a}.$$
En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$$

Exercice 18.

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$. On pourra comparer avec $\frac{1}{x^\alpha}$ pour α bien choisi.
2. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de
$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x)$$
3. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.
4. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \ln(x)$. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 19 (Logarithme à la puissance n)**.**
Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.