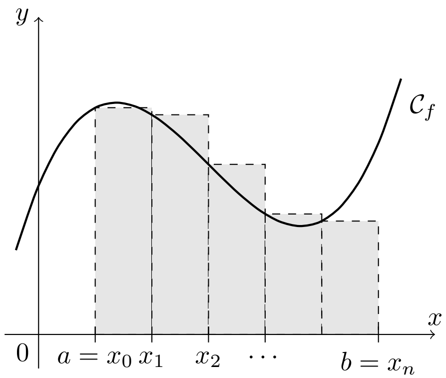
MÉTHODE DES RECTANGLES ET SOMMES DE RIEMANN [1]

Soit f continue sur $[a, b]$ $(a < b)$. La "méthode des rectangles" est une méthode qui permet de donner une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, à l'aide des sommes de Riemann.

Rappel de la méthode

- On partage cet intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$ $(n > 0)$
- On obtient alors $n+1$ extrémités notées $x_0, x_1, \ldots x_n$ et on a : $x_0 = a$ $x_n = b$ et $\boxed{x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}}$
- L'écart entre x_i et x_{i+1} est toujours $\frac{b-a}{n}$.
- On construit alors des rectangles de largeur $[x_k; x_{k+1}]$ de deux façons :
  Soit on prend pour longueur $f(x_k)$ et l'aire de chaque rectangle est

$$\left(\frac{b-a}{n}\right) \times f(x_k) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \times f(a + k\frac{b-a}{n})$$

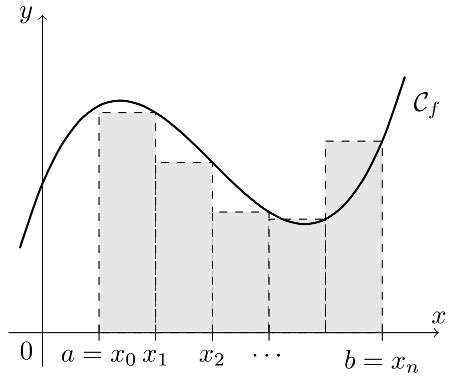


Pour obtenir une valeur approchée de l'aire sous la courbe, on somme les aires de ces rectangles :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

- Soit on prend pour longueur $f(x_{k+1})$ et l'aire de chaque rectangle est

$$\left(\frac{b-a}{n}\right) \times f(x_{k+1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \times f(a + (k+1)\frac{b-a}{n})$$



Pour obtenir une valeur approchée de l'aire sous la courbe, on somme les aires de ces rectangles :

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Proposition 1.

Les deux sommes $S_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ *et* $T_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ *sont appelées* **Sommes de Riemann**, *et pour* n *suffisamment grand elle donne une approximation de* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 1.
Compléter la fonction Scilab suivante qui pour $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie la valeur des deux sommes de Riemann associées à la fonction carrée sur $[0, 1]$.

```
function resultats=riemann1(n)

        S=
        pas=1/n
        for i=
                        S=S+(    )^2
        end
        S=S/n

        T=
        for
```

1. D'après un document de J. Letemplier

```
        end
        T=T/n
        resultats=[T,S]
endfunction

disp(riemann1(100))
```

Exercice 2.
modifier la fonction Scilab précdente qui pour $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie la valeur des deux sommes de Riemann associées à la fonction carrée sur $[-1, 1]$.

Exercice 3.
Ecrire une fonction scilab `rieman3(n,a,b)` qui donne par la méthode des rectangles un encadrement de $\int_a^b t^3 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.
Même exercice que le précédent pour $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t$ La valeur exacte de cette intégrale est $\frac{\pi}{6}$.

Utilisation théorique

Théorème 1 (sommes de Rieman)**.**
Si f est une fonction continue sur le segment $[a;\, b]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5.
Calculer les limites des suites suivantes en faisant apparaitre des sommes de Riemann

1. $u_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-k/n}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\dfrac{k}{n^3}}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{n+k}$ (commencer par un changement d'indice)
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{\frac{1}{n}}$ passer au ln.
6. $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$