Devoir surveillé de mathématiques
Samedi 21 novembre
réponses

La rédaction et la présentation seront prises en compte lors de la notation.

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

.1 Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x \text{ :} \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

RÉPONSE:

Soit P_1 et P_2 deux polynômes de E et α un réel.

$$\begin{aligned} f(\alpha P_1 + P_2) &= (X-1)(\alpha P_1 + P_2)' + \alpha P_1 + P_2 \\ &= (X-1)(\alpha P_1' + P_2') + \alpha P_1 + P_2 && \text{linéarité de l'intégration} \\ &= \alpha\left((X-1)P_1' + P_1\right) + (X-1)P_2' + P_2 \\ &= \alpha f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

Donc

$$f \text{ est linéaire}$$

De plus si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors

$$\deg(P') \leqslant 2 - 1$$

donc

$$\deg((X-1)P') \leqslant 1 + 1$$

et

$$\deg((X-1)P' + P) \leqslant \max(\deg((X-1)P'), \deg P) \leqslant 2$$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme.}}$$

*

2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathscr{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

RÉPONSE:

On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(P_0)(x) &= (x-1)\cdot 0 + 1 \\ &= 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ f(P_1)(x)(x-1)\cdot 1 + x &= -1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \\ f(P_2)(x) &= (x-1)\cdot 2x + x^2 \\ &= -2x + 3x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

*

3. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes $R_0,\ R_1,\ R_2$ définies par :

pour tout réel x : $\qquad R_0\left(x\right) = 1,\ R_1\left(x\right) = x - 1$ et $R_2\left(x\right) = \left(x-1\right)^2$

RÉPONSE:

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(R_0)(x) &= f(P_0)(x) \\ &= R_0(x) \\ f(R_1)(x) &= (x-1)\cdot 1 + x - 1 \\ &= 2R_1(x) \\ f(R_2)(x) &= (x-1)\cdot 2(x-1) + (x-1)^2 \\ &= 3R_2(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a } f(R_0) = R_0,\ f(R_1) = 2R_1,\ f(R_2) = 3R_1\ .}$

*

4. Montrer que $\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de E.
   Écrire la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.

RÉPONSE:

Répondons aux deux premières questions simultanément, on pose P la matrice dont les colonnes sont formées par les coordonnées de (R_0, R_1, R_2) exprimés dans la base (P_0, P_1, P_2)

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Comme cette matrice est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls, elle est inversible

$$\boxed{\mathscr{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de } E.}$$

D'après la question précédente

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

*

5. Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

   En déduire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$

RÉPONSE:

Par le calcul, on trouve ce qui est demandé et o constate en plus que $P_0 = R_0$, l'énoncé nous donne la décomposition des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathscr{B}'$, P^{-1} est la matrice qui est demandée est la matrice dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs de la bases canonique exprimés dans la base $\mathscr{B}$'

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

*

6. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$.

RÉPONSE:

D'après la formule de changement de base

$$A = PDP^{-1}$$

donc d'après la formule d'inversion d'un produit

$$A^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.}$$

La récurrence est laissée en exercice. Comme D est diagonale,

cette matrice étant elle même diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(D^{-1}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

ce qui permet de calculer

$$\boxed{\text{La dernière colonne de } \left[A^{-1}\right]^n = \begin{pmatrix} 1 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.}$$

*

.2 Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve ($k \geqslant 0$)

On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} \mathrm{P}\left[X_k = 0\right] \\ \mathrm{P}\left[X_k = 1\right] \\ \mathrm{P}\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{P}\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 Calculer l'espérance et la variance de X_2

RÉPONSE:

On considère le système complet d'évènements $[X_1 = 0],\ [X_1 = 1],\ [X_1 = 2]$. Comme le premier tirage se fait de façon honnête dans la l'urne non modifiée

$$P[X_1 = 0] = P[X_1 = 1] = P[X_1 = 2] = \frac{1}{3}$$

On sait de plus que

- si $X_1 = 2$ est réalisé l'urne comporte encore les boules $\{0, 1, 2\}$
- si $X_1 = 2$ est réalisé l'urne comporte encore les boules $\{0, 1\}$
- si $X_1 = 0$ est réalisé l'urne ne comporte que la boules $\{0\}$

D'après le théorème des probabilités totales

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P[X_1 = 0]P_{[X_1=0]}[X_2 = 0] + P[X_1 = 1]P_{[X_1=1]}[X_2 = 0] + P[X_1 = 2]P_{[X_1=2]}[X_2 = 0] \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 1) &= P[X_1 = 0]P_{[X_1=0]}[X_2 = 1] + P[X_1 = 1]P_{[X_1=1]}[X_2 = 1] + P[X_1 = 2]P_{[X_1=2]}[X_2 = 1] \\
&= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 2) &= P[X_1 = 0]P_{[X_1=0]}[X_2 = 2] + P[X_1 = 1]P_{[X_1=1]}[X_2 = 1] + P[X_1 = 2]P_{[X_1=2]}[X_2 = 2] \\
&= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{18}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P(X_2 = 0) = \frac{11}{18} \ P(X_2 = 1) = \frac{5}{18} \ P(X_2 = 2) = \frac{2}{18}.}
$$

Comme la variable aléatoire est à support fini elle admet une espérance et

$$
\begin{aligned}
E(X_2) &= 0P(X_2 = 0) + 1 \cdot P(X_2 = 1) + 2 \cdot P(X_2 = 2) \\
&= 0 + \frac{5}{1}8 + \frac{4}{1}8 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{X_2 \text{ admet une espérance qui vaut } \frac{1}{2}}
$$

*

2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$
U_{k+1} = A^{-1}U_k
$$

RÉPONSE:

D'après le théorème des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $[X_k = 0],\ [X_k = 1],\ [X_k = 2]$

$$\begin{aligned}P(X_{k+1} = 0) &= P[X_k = 0]P_{[X_k=0]}[X_{k+1} = 0] + P[X_k = 1]P_{[X_k=1]}[X_{k+1} = 0] + P[X_k = 2]P_{[X_k=2]}[X_{k+1} = 0] \\ &= P[X_k = 0] \cdot \frac{1}{1} + P[X_k = 1] \cdot \frac{1}{2} + P[X_k = 2] \cdot \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[X_{k+1} = 1) &= P[X_k = 0]P_{[X_k=0]}[X_{k+1} = 1] + P[X_k = 1]P_{[X_k=1]}[X_{k+1} = 1] + P[X_k = 2]P_{[X_k=2]}[X_{k+1} = 1] \\ &= P[X_k = 0] \cdot 0 + P[X_k = 1] \cdot \frac{1}{2} + P[X_k = 2] \cdot \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_{k+1} = 2) &= P[X_k = 0]P_{[X_k=0]}[X_{k+1} = 2] + P[X_k = 1]P_{[X_k=1]}[X_{k+1} = 2] + P[X_k = 2]P_{[X_k=2]}[X_{k+1} = 2] \\ &= P[X_k = 0] \cdot 0 + P[X_k = 1] \cdot 0 + P[X_k = 2] \cdot \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} P[X_{k+1} = 0] \\ P[X_{k+1} = 1] \\ P[X_{k+1} = 2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

et on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui démontre que la matrice trouvée est l'inverse de A

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k : U_{k+1} = A^{-1}U_k.}$$

*

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0

RÉPONSE:

On démontrerait par récurrence (à faire ?)

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \in \mathbb{N},\ \left[A^{-1}\right]^k U_0\ .}$$

Remarque : la formule est vraie pour $k = 1$ car on a bien choisie U_0, on a considéré qu'au temps 0 la bille 3 a été tirées, au début de l'étape 1 l'urne contient bien $\{0, 1, 2\}$ c'est bien l'urne initiale

*

4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k = 0\right] = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k = 1\right] = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \mathrm{P}\left[X_k = 2\right] = 0$$

RÉPONSE:

$\boxdot$

*

Ecricom 2017

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

RÉPONSE:

On trouve

$$\boxed{(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (A-I)^3 = 0}$$

$*$

2. La matrice A est-elle inversible ?

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible (calculs à faire)}}$$

$*$

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1;\,1[\,, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;\,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

RÉPONSE:

La fonction $x \mapsto x+1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;\,1[$ et sur cet intervalle elle prend des valeurs sur $]0;\,1[$.
La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;\,+\infty[$ (on a exclu 0) donc par composition

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]-1;\,1[}$$

On a pour $x \in]-1;\,1[$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$
$$\varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x^{3/2}}$$

$$\boxed{\varphi'(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \varphi''(0) = -\frac{1}{4}}$$

$*$

4. Citer la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, et **calculer** un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

RÉPONSE:

La fonction étant de classe $\mathcal{C}^2$ on peut appliquer la formule de taylor Young et donc

$$\sqrt{1+x} = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{\varphi'(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Et donc

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

*

5. On note $P(x) = 1+\frac{1}{2}x+\alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
(P(x))^2 &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 \\
&= 1^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(-\frac{1}{8}x^2\right)^2 + 2\times 1\times\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\times 1\times\left(-\frac{1}{8}x^2\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{1}{8}x^2\right) \\
&= 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 \\
&= 1 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(x)^2 = 1 + x - \tfrac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4}$$

*

6. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = A$. Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

RÉPONSE:

On constate que $C^3 = 0$, donc $C^3 = C^4 = 0$.
On a

$$(I + \frac{1}{2}C + \alpha C^2)^2 = (P(C))^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 - \frac{1}{4}C^2 - \frac{1}{8}C^3 = I + C = A$$

$$\boxed{(P(C))^2 = A}$$

*

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Soient $u,\ v$ et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$

   (a) Calculer les vecteurs v et u.

RÉPONSE:

La matrice de l'application $f - Id$ dans la base canonique est $A - I$ que l'on a calculer précédemment.
On a aussi $u = (f - Id) \circ (f - Id)(w)$ Pour calculer ces vecteurs on utilise la matrice $A - I$ et $(A - I)^2$

$$(A - I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur v a pour coordonnées dans la base canonique $(1, 1, -3)$

$$(A - I)^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc le vecteur v a pour coordonnées dans la base canonique $(-6, -6, 0)$

$\square$

*

   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

Soit α, β et γ trois réels

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\Leftrightarrow \ldots Afinir \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

La famille (u, v, w) est libre. Comme de plus Dim $\mathbb{R}^3 = 3$

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

*

(c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

RÉPONSE:

D'apres la définition des trois vecteurs (u, v, w) on sait que

$$f(v) = u + v \qquad f(w) = v + w$$

Ce qui nous donne les deux dernières colonnes de la matrice Puis en utilisant On a aussi $(A - I)^3 = 0$ donc

$$(f - Id) \circ (f - Id) \circ (f - Id)(w) = 0$$

ce qui donne

$$(f - Id) \circ (f - Id)(v) = 0$$

puis

$$(f - Id)(u) = 0$$

donc

$$f(u) = u)$$

Ce qui permet de remplir la première colonne

$$\boxed{\text{La matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ est } T}$$

*

(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

RÉPONSE:

Cette matrice P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$. On la construit en metant dans les colonnes es coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ décomposés dans la base canonique.

□

*

8. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

où a, b et c sont trois réels.

RÉPONSE:

On suppose que $N^2 = T$ alors

$$NT = NN^2 = N^3$$

et

$$TN = N^2 N = N^3$$

donc

$$\boxed{\text{Si } N^2 = T, \text{ alors } NT = TN}$$

On suppose que $N^2 = T$ alors on sait que $NT = TN$. Cherchons N sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Alors $NT = TN$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}$$

Cette égalité entre deux matrices nous donne le système a neufs équations et neuf inconnues

$$\begin{cases} a+d &= a \\ b+e &= a+b \\ c+f &= b+c \\ d+g &= d \\ e+h &= d+e \\ f+i &= e+f \\ g &= g \\ h &= g+h \\ i &= h+i \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} d &= 0 \\ e &= a \\ f &= b \\ g &= 0 \\ h &= d \\ i &= e \\ g &= 0 \\ i &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d &= 0 \\ e &= a \\ f &= b \\ g &= 0 \\ h &= 0 \\ i &= a \\ g &= 0 \\ h &= 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } N^2 = T\text{, alors } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}$$

*

(b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

RÉPONSE:

On peut donc chercher les solutions sous la forme $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ L'équation $N^2 = T$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} a^2 & = 1 \\ 2ab & = 1 \\ 2ac + b^2 & = 0 \end{cases}$$

Il y a donc dexu solutions pour $a = \pm 1$

Avec $a = 1$ On a une solution

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et avec $a = -1$ on trouve une autre solution

$$N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Les deux solutions sont } N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

*

9. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

RÉPONSE:

Soit M une matrice carrée d'ordre 3

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP = T \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2 && \text{Résolution précédente} \\ &\Leftrightarrow M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les deux solutions sont } PN_1P^{-1},\ PN_2P^{-1}.}$$

Remarque : Programme

```
A=[0,1,2;-1,2,2;-3,3,1]
I=diag([1,1,1])


M=I+0.5*(A-I)-1/8*(A-I)^2
disp(M, 'une solution partie B')
disp(M^2,'verification')

P=[-6,1,1;-6,1,0;0,-3,1]
Pi=inv(P)

N1=[1,1/2,-1/8;0,1,1/2;0,0,1]
N2=[-1,-1/2,1/8;0,-1,-1/2;0,0,-1]

disp(N1^2, 'calcul du carre de N1')
disp(N2^2, 'calcul du carre de N2')

M1=P*N1*Pi
M2=P*N2*Pi

disp(M1," premiere solution  M1")
disp(M2," deuxieme solution  M2")
```

Le résultat affiché est

```
une solution partie B

1.25  -0.25   1.
```

```
0.25   0.75   1.
-1.5    1.5    1.

verification

0.   1.   2.
-1.   2.   2.
-3.   3.   1.

calcul du carre de N1

1.   1.   0.
0.   1.   1.
0.   0.   1.

calcul du carre de N2

1.   1.   0.
0.   1.   1.
0.   0.   1.

premiere solution  M1

1.25  -0.25   1.
0.25   0.75   1.
-1.5    1.5    1.

deuxieme solution  M2

-1.25   0.25  -1.
-0.25  -0.75  -1.
1.5   -1.5   -1.
```

Donc on retrouve bien que PN_1P^{-1} est la solution trouvé dans la partie B !

*

10. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

RÉPONSE:

$\boxed{\text{Ce n'est pas un espace vectoriel car la matrice nulle n'est pas solution de cette équation.}}$

*

EXERCICE 1

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

RÉPONSE:

Remarque : Ce ne sont pas des intégrales impropres.
Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont continues sur l'intervalle **fermé** $[0;\, 1]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in_N \text{, les intégrales } I_n \text{ et } J_n \text{ existent}}$$

*

2. Calculer I_0 et I_1

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{x^1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln\left((1+x)^2\right)\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 \\
&= \left[\ln(1+x)\right]_0^1 \\
&= \ln(2)-\ln(1)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2} \text{ et } I_1 = \ln 2}$$

*

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n\left(x^2+2x+1\right)}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n\left(x+1\right)^2}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n = \frac{1}{n+1}}$$

$*$

(b) En déduire I_2

RÉPONSE:

En utilisant la formule précédente pour $n = 0$, on a

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = \frac{1}{0+1}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2} - \ln 2}$$

$*$

(c) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

RÉPONSE:

On a pour n plus grand que 2

$$I_n = \frac{1}{n-1} - 2I_{n-1} - I_{n-2}$$

$*$

```
n=input ('donnez une valeur pour n: ')
a=1/2
b= log(2) - 1/2 ///?????
for k=2: n
        aux = a
        a=1/(i-1)-2*a-b
        b=aux
end
disp (b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

RÉPONSE:

Soit n un entier naturel

$$\forall x \in [0;\,1] \qquad 0 \leqslant x^n$$

donc comme $(1+x) > 1$

$$\forall x \in [0;\,1] \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$$

PAr croissance de l'intégrale les bornes étant rangées dans l'ordre croissant

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

Comme

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$$

*

(b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

RÉPONSE:

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

*

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n.J_{n-1} - \frac{1}{2}$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On pose pour $t \in [0;\, 1]$

$$u(t) = -\frac{1}{1+x} \qquad u'(t) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$v(t) = x^n \qquad v'(t) = nx^{n-1}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\, 1]$.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x && \text{intégration par parties} \\
&= \left[-\frac{x^n}{(1+x)}\right]_0^1 + n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}
\end{aligned}$$

$\square$

*

6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
J_0 &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= [\ln(1+x)]_0^1 \\
&= \ln 2 - \ln
\end{aligned}$$

$$\boxed{J_0 = \ln 2}$$

Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned}
J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ un entier naturel } J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$$

*

(b) En déduire la valeur de J_1

RÉPONSE:

On a donc

$$J_0 + J_1 = \frac{1}{1}$$

donc

$$\boxed{J_1 = 1 - \ln 2}$$

*

7. En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

RÉPONSE:

La formule précédente peut s'écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad J_k = \frac{1}{k} - J_{k-1}$$

*

```
n=input ('donnez une valeur pour n: ')
J=\log (2)
for k=1: n-1
        J=1/k-J
end
I=n * J-1/2
disp(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$

RÉPONSE:

On commence par rappeller que pour p entier naturel.

$$-(-1)^p = (-1)^{p+1} \qquad (1) = (-1)^p(-1)^p$$

Raisonnons par récurrence, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$\mathcal{H}_n \ : \ J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

Initialisation

$$J_1 = 1 - \ln 2$$

et

$$(-1)^1 \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = -\left(\ln 2 - 1\right)$$

$\mathcal{H}_1$ est donc vraie

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons avoir démontré que $\mathcal{H}_n$ est vraie *i.e.*

$$J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

alors d'après une question précédente

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \\
&= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) && \text{HR} \\
&= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(-\frac{(-1)^{n}}{n+1} + \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)
\end{aligned}$$

conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)}$$

*

9. (a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$

RÉPONSE:

D'après la question 5

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad J_{n-1} = \frac{1}{n}\left(I_n + \frac{1}{2}\right)$$

comme de plus

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

par opérations on obtient

$$lim_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

*

(b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

RÉPONSE:

En utilisant la question 8

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)=0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)=0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \tfrac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ converge et sa somme vaut } \ln 2}$$

*

(c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha>0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$

RÉPONSE:

D'après la question 5

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad J_n=\frac{I_{n+1}}{n+1}\frac{1}{2(n+1)}$$

Comme on a vu (4b) que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=0$$

alors au voisinage de $+\infty$

$$\frac{I_{n+1}}{n}=o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

et donc

$J_n\sim_{+\infty} dfrac12(n+1)$ et comme $\dfrac{1}{n}\sim_{+\infty}\dfrac{1}{n+1}$

$$\boxed{J_n\sim\frac{1}{2n} \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

*

10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$
    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$

RÉPONSE:

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad J_n = (-1)^n u_n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{(-1)^n} J_n = (-1)^n J_n$$

$$\boxed{u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n} \text{ au voisinage de } +\infty}$$

*

    (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n?

RÉPONSE:

On a montré que la série $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge donc en multipliant par une constante

$$\boxed{\text{La série la série de terme général } \tfrac{(-1)^n}{2n} \text{ est convergente}}$$

On peut même calculer sa somme totale.
On ne peut pas en déduire la nature de $\sum u_n$ car le théorème de comparaison ne s'applique qu'au série À TERMES POSITIFS

*

11. On se propose, malgré 1'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$
    (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$

RÉPONSE:

Soit k un entier naturel non nul

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= \ln(2) - \sum_{j=1}^{j+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\
&= \ln(2) - \sum_{j=1}^{j} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^{k+1-1}}{k+1} \\
&= u_k - \frac{(-1)^k}{k+1}
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
(k+1)u_{k+1} &= (k+1)u_k - (-1)^k \\
&= ku_k + u_k - (-1)^k
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k \text{ non nul, : } u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k}$$

*

(b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

<u>RÉPONSE:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k\right) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)u_{k+1} - ku_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k\right) \\
&= (n+1)u_{n+1} - 1u_1 + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^k\right) && \text{télescopage (à détailler ?)} \\
&= (n+1)u_{n+1} - 1u_1 + (-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} && \text{somme des termes d'une suite géométrique}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \tfrac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)}$$

*

(c) Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{2n}\right) = (2n+1)u_{2n+1} - u_1$$

or

$$u_1 = \ln 2 - 1$$

et

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$$

donc

$$u_{2n+1} \sim \frac{-1}{2(2n+1)}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

par somme

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = -\frac{1}{2} - \ln 2 + 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{2n+1}\right) = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - 1$$

or

$$u_1 = \ln 2 - 1$$

et

$$u_n \sim \frac{1}{2n}$$

donc

$$u_{2n+2} \sim \frac{1}{2(2n+2)}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+2)u_{2n+2} = 1\frac{1}{2}$$

par somme

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln 2 + 1 - \frac{1}{2}}$$

*

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$

<u>RÉPONSE:</u>

On sait (question 9b) que

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\ln 2$$

donc

$$u_k=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}-\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

$$\boxed{\text{Réponse le c}}$$

*