Couples de variables aléatoires discrètes : compléments

ECE 2 Lycée international de Valbonne

22 novembre 2020

Table des matières

Dans tout la suite les variables aléatoires discrètes sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$

I Méthodes et résultats à connaître sur les couples de VAD

I.1 Créer des vad

Proposition 1.
Soit X et Y deux variables aléatoires. Soit f une fonction à valeurs réelles telle que $f(x,y)$ soit défini pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$.
Alors $f(X,Y)$ est une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

Exercice :
Dans chacun des cas suivants expliciter qu'elle la fonction f

- $\max(X,Y)$ est une vad on pose $f(.,.) =$
- $\min(X,Y)$ est une vad on pose $f(.,.) =$
- $X+Y$
- XY

Théorème 1 (Rappel : théorème de transfert).
Soit $(X,\ Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes et $g(x,y)$ une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
Alors

$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

sous réserve que cette dernière série converge absolument.

I.2 Méthode : calculer la loi d'un maximum ou d'un minimum

Méthode loi d'un maximum

Soit X et Y deux variables aléatoires pour calculer la loi de $\max(X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\max(X, Y) \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(\max(X, Y) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant x)$$

Ce qui permet de calculer la fonction de répartition.

Méthode loi d'un minimum

Soit X et Y deux variables aléatoires pour Calculer la loi de $\in (X, Y)$ on peut remarquer que pour tout réel x

$$[\min(X, Y) > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) > x) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(Y > x)$$

Et en utilisant $\mathbb{P}(\square \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(\square > x)$ permet de trouver un lien entre fonction de répartition de X, Y et du minimum.

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer la loi du maximum et du maximum de X et Y

I.3 Méthode : Calculer la loi d'une somme

Méthode loi d'une somme

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour calculer la loi de $\max(X,Y)$ on peut remarquer que pour tout entier naturel

$$[X+Y=k] = \bigcup_{k=0}^{n} [X=k] \cap [Y=n-k] = \bigcup_{k=0}^{n} [X=n-k] \cap [Y=k] = \bigcup_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n \\ i+j=n}} [X=i] \cap [Y=j]$$

Et ces événements sont incompatibles deux-à-deux.

Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

Attention : Il faut adapter les indices des $\sum$ précédentes au support de X et Y

I.3.a Résultat : Stabilité de la loi binomiale pour la somme

***lemme* 1** (Égalité de Vandermonde)**.**
Soit m,n et k trois entiers naturels alors

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

Démonstration :

- Méthode 1 : En développant à l'aide du binôme de Newton $(1+x)^{n+m} = (1+x)^m(1+x)^n$
- Méthode 2 : En dénombrant le nombre de façon de tirer k billes simultanément dans une urne contenant n billes noires et m billes mordorées.

Théorème 2 (Somme de deux lois binomiales « avec le même p »)**.**
Soit n_1 et n_2 deux entiers naturels et $p \in]0;\, 1[$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$$

Démonstration :
À savoir faire

I.3.b Résultat : Stabilité de la loi de Poisson pour la somme

Théorème 3 (Somme de deux lois de Poisson)**.**
Soit λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.
Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

II Indépendance et covariance

II.1 Indépendance et conséquence

Définition 1 (Rappel : indépendance de deux variables aléatoires discrètes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes *si et seulement si*

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

Proposition 2 (Rappel espérance d'une somme : linéarité de l'espérance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes[1] *admettant une espérance alors $X + Y$ admet une espérance et*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Plus généralement si α et β sont des réels $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

1. **non nécessairement indépendantes**

Démonstration :
À savoir faire

Proposition 3 (Espérance d'un produit)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes ***indépendantes*** *admettant une espérance telle que XY admet une espérance alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Attention : Quelle sont les différences entre les hypothèses de ces deux théorèmes ?

Démonstration :

II.2 Covariance

Définition 2 (Covariance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On note alors

$$Cov\,(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y)]$$

Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	1	2	3	loi de X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
loi de Y	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

(exemple1)

Nous allons calculer directement la covariance

Proposition 4 (Propriétés de la covariance)**.**
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Soit α et β deux réels.

1. Symétrie : $Cov\left(X,Y\right) = Cov\left(Y,X\right)$.
2. La variance comme covariance $Cov\left(X,X\right) = V(X)$
3. Linéarité à droite $Cov\left(\alpha X + \beta Y, Z\right) = \ldots$
4. Linéarité à gauche $Cov\left(X, \alpha Y + \beta Z\right) = \ldots$
5. *Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en* bilinéarité

Exercice 1 (Calculs classiques)**.**
X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Simplifier les expressions suivantes

1. $\mathrm{Cov}\left(X+Y, X+Y\right)$
2. $\mathrm{Cov}\left(X+Y, X-Y\right)$
3. $\mathrm{Cov}\left(X-Y, X-Y\right)$

Proposition 5 (Variable presque certaine)**.**
Soit c une constante (ou une variable aléatoire presque certaine égale à c).

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2.

$$Cov\left(X, c\right) = 0$$

$$Cov\left(X+c, Y\right) = Cov\left(X, Y\right)$$

Théorème 4 (Formule de Huygens)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$Cov\left(X,Y\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Démonstration :

Proposition 6 (Lien entre covariance et indépendance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes alors

$$Cov\,(X,Y) = 0$$

Attention : La réciproque est fausse ! !

Exemple : Soit X et Y deux variables aléatoires dont la loi du couple est

X/Y	-1	1	loi de X
0	$1/2$	$1/2$	
1	$1/2$	$1/2$	
loi de Y			1

(exemple2)

Calculons la covariance de (X,Y)

Proposition 7 (Variance d'une somme)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Soit α et β deux réels

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov\,(X,Y)$$

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov\,(X,Y)$$

Proposition 8 (Variance d'une somme de deux vad indépendantes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. On suppose que X et Y sont indépendantes Alors

$$V(X+Y) =$$

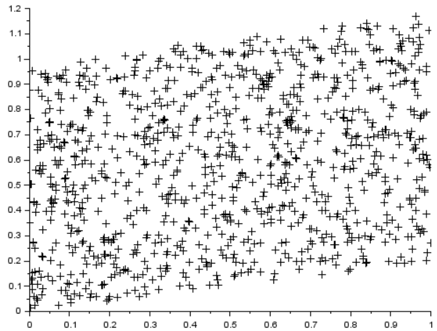
Définition 3 (Coefficient de corrélation linéaire)**.**

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et un écart-type non nul.
On définit le coefficient de corrélation linéaire

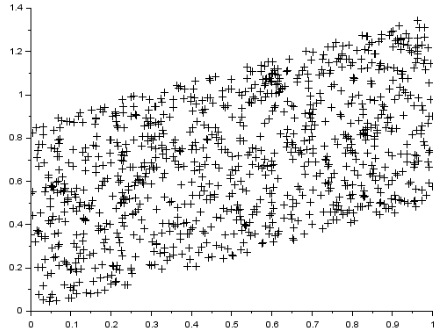
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Où σ_X et σ_X sont les écarts types de X et Y.

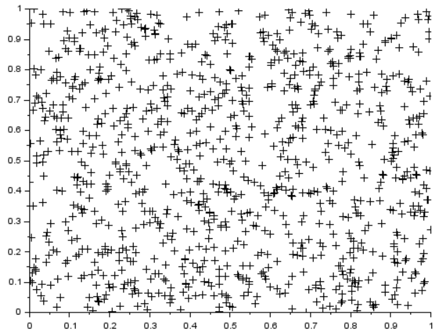
```
// lois uniformes sur [0,1], indépendantes
x1=grand(1000,1,'unf',0,1)
y1=grand(1000,1,'unf',0,1)

// avec un coefficients de corrélation fixé
a=input('coefficient de correlation voulu')
z1=a*x1+sqrt(1-a^2)*y1
plot2d(x1,z1,-1)
rho=corr(x1,z1,1)/stdev(x1)/stdev(z1)
disp(rho)
```



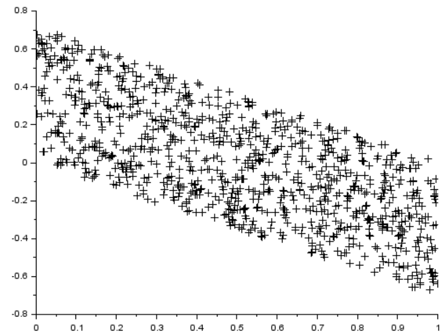
$\rho = 0, 2$



$\rho = 0, 5$



$\rho = 0$



$\rho = -0, 7$

Proposition 9 (Cauchy-Schwarz)**.**
Soit X et Y deux variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 alors

$$|\rho(X, Y)| \leqslant 1$$

De plus il y' a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si il existe a et b deux constantes telles que

$$X = aY + b \qquad \textit{ou } Y = aX + b$$

III Suites de variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie toutes les variables aléatoires sont discrètes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

III.1 Exemples

III.2 Indépendance

Définition 4 (indépendance mutuelle de n variables aléatoires discrètes)**.**
Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires.
*On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si*

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega),\ \forall \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap [X_i = x_i]\right) =$$

Définition 5 (Indépendance mutuelle d'une suite infinie de variables aléatoires discrètes)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de variables aléatoires discrètes. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout partie $I \subset \mathbb{N}$ finie les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes au sens précédent.

Proposition 10 (Lemme des coalitions)**.**
Soit $(X_1, X_2, \ \dots X_p, \ X_{p+1}, \ X_n)$ n variables aléatoires discrètes.
Alors toute fonction des vad X_1,...X_p est indépendante de toute fonctions de X_{P+1},...X_n

Exemple : Si X_1 X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes alors X_1 est indépendante de $\max(X_2, X_3)$

Définition 6 (Espérance et variance d'une somme)**.**
Soit X_1, X_2, $\dots X_n$, n variables aléatoires . Alors

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$

*Si de plus ces variables aléatoires sont **mutuellement indépendantes***

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$