

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES : COMPLÉMENTS

Les techniques utiles

Exercice 1.

x, y et z désignent des réels.

1. Montrer que $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$
2. Montrer que $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$
3. Montrer que $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$
4. Trouver une formule analogue pour $\max(x, y)$

Exercice 2.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires. Le but de cet exercice est de « commencer » à calculer la loi de $X + Y$. Compléter les formules suivantes

1. **Exemple** Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [X + Y = n] = \bigcup_{j=0}^n [X = j] \cap [Y = n - j] = \bigcup_{j=0}^n \dots$$

et dans cette union les événements sont incompatibles deux à deux.

2. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
4. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ alors ...

5. Si $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ alors ...

Exercice 3 (Maximum de trois v.d., minimum de trois v.d.).

Soit X, Y et Z trois v.d. de support $\mathbb{N}$ en s'inspirant du cours donner une méthode pour calculer $\min(X, Y, Z)$ et $\max(X, Y, Z)$

Exercice 4.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

Compléter la formule suivante

$$\text{Cov}(X, Y) = \left(\sum \sum x_i y_j \mathbb{P}(?) \right) - E(X)E(Y)$$

Somme, max, min

Exercice 5.

On lance deux pièces qui donnent pile avec la probabilité $p \in]0; 1[$.

On lance la première pièce jusqu'au premier pile et on note X_1 le rang du premier pile pour la première pièce. On prend la deuxième pièce et on la lance jusqu'à obtenir un pile et on note X_2 le rang d'apparition du premier pile.

1. Analyse du sujet : X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Qu'elles sont leur loi.
2. Calculer la loi de $X_1 + X_2$
3. Calculer $\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1 = k)$
4. Analyse du sujet : Décrire une expérience avec des dés qui nous ferait à faire le même type de calcul

Exercice 6.

Soit X et Y deux variable aléatoires discrètes indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité de l'évènement

$$\max(X, Y) = \min(X, Y)$$

Exercice 7 (Trois lois de Bernoulli).

Soit A , B et C trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Calculer la loi de ABC
2. A et ABC sont elles indépendantes ?

Exercice 8 (Trois lois uniformes).

Soit X , Y et Z trois variables aléatoires suivant la même loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose de plus qu'elles sont indépendantes.

1. Calculer la loi de $\max(X, Y, Z)$.
2. Quelles sont les valeurs prises par $X + Y$?
3. Montrer que

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } k \in \llbracket 2, n \rrbracket \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket \end{cases}$$

4. Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

Exercice 9.

Soit p et r deux réels de $]0; 1[$, et

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$.
2. En déduire la loi de $\min(X, Y)$
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$
4. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces.

Calculs des espérances et variances des loi usuelles

Exercice 10 (loi uniforme).

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

1. Calculer $E(X)$.
2. En utilisant la formule de Koenig-Huyggens calculer $V(X)$
3. $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ où a et b sont deux entiers telles que $a < b$. Trouver deux entiers p et n tels que $Y = Z + p$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
4. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

Exercice 11 (Loi binomiale).

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

1. Démontrer que pour tout entier k et n tels que $0 \leq k \leq n$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

2. Utiliser la formule précédente pour calculer $E(X)$
3. Donner une formule analogue à celle de la question 1 pour $k(k-1) \binom{n}{k}$.
4. En déduire $E(X(X-1))$
5. En déduire $V(X)$

Exercice 12 (Loi de Poisson).

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $E(X)$
2. Calculer $E(X(X-1))$
3. En déduire $V(X)$

Exercice 13 (Loi géométrique).

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

1. Calculer $E(X)$
2. Calculer $E(X(X-1))$
3. En déduire $V(X)$

Covariance et ρ .

Exercice 14.

Soit A et B deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([1, n])$

1. Simplifier $[A + B = 2n] \cap [A - B = 0]$
2. En déduire que $A + B$ et $A - B$ ne sont pas indépendantes
3. Montrer $\text{cov}(A + B, A - B) = V(A) - V(B)$
4. $A + B$ et $A - B$ sont-elles corrélées?

Exercice 15.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[1, n]$. Soit z une variable aléatoire suivant la loi donnée par :

$$z(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \mathbb{P}(z = -1) = \mathbb{P}(z = 1)$$

On suppose que X et z sont indépendantes et on note

$$Y = zX$$

1. X et Y sont-elles indépendantes?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.
4. Conclusion?

Exercice 16.

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre λ .

1. Donner la loi de $X + Y$ et la loi de $Y + Z$
2. Calculer la covariance de $X + Y$ et $Y + Z$
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de $X + Y$ et $Y + Z$

Exercice 17.

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ et la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(X, p)$ où p est un réel fixé appartenant à $]0; 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}_{X=j}(Y = i)$. On distinguera les cas $i \leq j$ et $i > j$.
2. En déduire la loi du couple (X, Y) .
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
4. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre d'échec. Montrer sans calcul que Z suit une loi de Poisson de paramètre λq .
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.
6. Montrer que $V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$.
7. En déduire $\text{cov}(X, Y)$.
8. Que vaut $\text{cov}(X, Z)$?

Suites de v.a.d

Exercice 18 (Somme de loi de Bernoulli).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 19 (Somme de lois binomiales).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_i, p_i)$.

Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 20 (Somme de lois Poisson).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$.

Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 21.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $m = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $M = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On note $q = 1 - p$, et k désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_i > k) = q^k$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m > k)$ et en déduire la loi de m .
3. Calculer $E(m)$.
4. Calculer la loi de M .

Exercice 22.

On répartit aléatoirement m boules dans n urnes. On suppose que $m \geq 4$ et $n \geq 3$. Les urnes sont numérotées de 1 à n et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i contient au moins une boule à la fin de l'expérience et 0 sinon.

1. Analyse du sujet Comment interpréter l'énoncé « réparti aléatoirement... » ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_i = 0)$, en déduire la loi de X_i
3. Calculer $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$)
4. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
5. X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
6. Analyse du sujet décrire une expérience qui nous ferait faire le même type de calculs.

Exercice 23.

Une urne contient n_1 boules portant le numéro 1, n_2 boules portant le numéro 2 et n_3 boules portant le numéro 3. On effectue k tirages avec remise et on note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de boules 1 obtenues, X_2 le nombre de billes 2 obtenues et X_3 le nombre de billes 3.

1. Donner les lois des variables X_1, X_2, X_3 ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$ et en déduire $\text{cov}(X_1, X_2)$.
3. Que peut-on dire du signe de cette covariance ?
4. Calculer $\rho(X_1, X_2)$.
5. On suppose maintenant que $n_2 = n_1$ et $n_3 = 0$. Que vaut alors $\rho(X_1, X_2)$?

Exercice 24.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0; 1[$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

1. Déterminer les lois de Y_2 et Y_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
3. En déduire la loi de Y_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?
6. Écrire une fonction `simulationY(n, k)` en Scilab pour simuler la variable aléatoire Y_n .

Exercice 25.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0; 1[$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et on note B_i une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

1. Trouver deux réels a et b tel que $X_i = aB_i + b$
2. Trouver la loi de S_n , donner son espérance et sa variance.
3. Écrire une fonction `simulationS(n, p)` en Scilab pour simuler la loi de S_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(S_n, S_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles S_n et S_{n+1} sont indépendantes ?

Pour aller plus loin

Exercice 26.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit N une variable aléatoire indépendante des précédentes qui suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On note pour tout entier

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

1. Pour n fixé donner la loi de S_n .
2. On pose $Y = S_N$. Donner $\mathbb{P}_{N=n}(Y = k)$
3. En déduire la loi de Y .
4. Bonus reprendre l'exo pour $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Exercice 27.

Soit X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variance non nulle.. Pour tout t on pose

$$\varphi(t) = V(X + tY)$$

1. Montrer que φ est toujours positive.
2. Trouver trois réels α, β et γ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

3. Montrer que $\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$
4. En déduire $|\rho(X, Y)| \leq 1$
5. On suppose que $\rho = 1$ en déduire une relation entre X et Y .
6. La réciproque est-elle juste?

Exercise 17

$$X \mapsto \mathcal{B}(X)$$

$$Y \mapsto \mathcal{B}(X, p)$$

$$1) P_{X=j}(Y=i) = \begin{cases} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

$$2) P(X=j, Y=i) = P(X=j) P_{X=j}(Y=i) \\ = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} p^i q^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

$$3) P(Y=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=j, Y=i) \quad \text{P.T. } (X, Y) \\ = \sum_{j=i}^{+\infty} P(X=j, Y=i)$$

$$= \sum_{j=i}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{i} p^i q^{j-i}$$

$$= e^{-\lambda} p^i \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{j!}{i! (j-i)!} q^{j-i}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^i}{i!} \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-i)!} q^{j-i}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^i}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+i}}{k!} q^k \quad k=j-i$$

"reduction" $\sum$

$\binom{j}{i} \rightarrow !$

chg indice

$$= \frac{e^{-\lambda}}{i!} p^i \lambda^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} q^k$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{i!} p^i \lambda^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!}$$

$$P(Y=i) = \frac{e^{-\lambda} p^i \lambda^i}{i!} e^{\lambda q}$$

Série
G.P

$$= \frac{e^{-\lambda + \lambda q}}{i!} (\lambda p)^i$$

$q = 1 - p$
 $-1 + q = -p$

$$= \frac{e^{-\lambda p}}{i!} (\lambda p)^i$$

$$Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$$

④ Il suffit d'inverser le rôle de p et q

$$\lambda \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$$

⑤ Soit i, j entiers de $\mathbb{N}$

$$P(Y=i, Z=k) = P(Y=i, X=i+k)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!} \binom{i+k}{i} p^i q^{i+k-i}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+k}}{(i+k)!} \frac{(i+k)!}{i! (i+k-i)!} p^i q^k$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^i \lambda^k}{i! k!} p^i q^k$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(p+q)\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^k}{k!} e^{-\lambda q} \\
&= P(Y=i) P(Z=k)
\end{aligned}$$

$$p+q=1$$

$$\begin{aligned}
&a^i b^i = (ab)^i \\
&e^{-(p+q)\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \\
&= e^{-p\lambda} e^{-q\lambda}
\end{aligned}$$

Y, Z sont indépendantes

⑥ $V(Z) = V(X-Y)$ car $X = Y + Z$

$$= \text{cov}(X-Y, X-Y)$$

$$= \text{cov}(X, X-Y) - \text{cov}(Y, X-Y)$$

$$= \text{cov}(X, X) - \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, X) + \text{cov}(Y, Y)$$

$$V(Z) = \underline{V(X)} - 2\text{cov}(X, Y) + V(Y)$$

⑥ $2\text{cov}(X, Y) = V(X) + V(Y) - V(Z)$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} (\lambda + p\lambda - q\lambda)$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$$

$$Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p\lambda)$$

$$Z \hookrightarrow \mathcal{P}(q\lambda)$$

$$= \frac{1}{2} ((p+q)\lambda + p\lambda - q\lambda)$$

$$\text{cov}(X, Y) = p\lambda$$

⑦ $\text{cov}(X, Z) = q\lambda$

