Devoir surveillé de mathématiques
Vendredi 18 décembre
Réponses

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.

RÉPONSE:

On a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M - I_3)^2 = 0}$$

*

2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.

RÉPONSE:

$\chi = (X-1)^3$ est donc un polynôme annulateur de M. Les valeurs propres de M sont racines de χ qui n'admet que 1 comme racine

$$\boxed{\text{La seule valeur propre possible de } M \text{ est 1 : Sp}(M) \subset \{1\}}$$

*

3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

0 n'est pas valeur propre de M donc

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

Supposons que M soit diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux seraient les valeurs propres et telles que

$$M = PDP^{-1}$$

Or la seule valeur propre possible est 1 , on aurait donc $D = I_3$ et donc $M = PP^{-1} = I_3$ ce qui est absurde.

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

*

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est une valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.

RÉPONSE:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons E_1 le sous espace propre associé à 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice colonne à coefficients réels.

$$
\begin{aligned}
X \in E_1 &\Leftrightarrow MX = 1 \cdot X \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z & = x \\ x - z & = y \\ x - y & = z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y + z
\end{aligned}
$$

On en déduit

$$E_1 = \{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires ils forment une base de E_1 E_1 n'est pas réduit à $\{0\}$ donc 1 est bien valeur propre de M

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M,\ E_1 \text{ a pour base } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est de dimension } 2.}$$

*

5. Démontrer que M n'est pas inversible.

RÉPONSE:

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de la matrice M. On a

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

Donc C_1 est combinaison linéaire de C_2 et C_3 donc la matrice n'est pas inversible.

$$\boxed{M \text{ n'est pas inversible.}}$$

Remarque : on a presque démontré que rg $(M) = 2$

*

6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

La matrice n'est pas inversible elle admet donc 0 comme valeur propre. Notons E_0 le sous espace propre associé à 0.

$$\text{Dim } E_0 \geqslant 1$$

or

$$\text{Dim } E_1 = 2$$

Donc,

$$\text{Dim } E_1 + \text{Dim } E_0 \geqslant 3$$

Or M étant d'ordre 3, la matrice est diagonalisable et l'inégalité précédente est une égalité

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable et Dim } E_0 = 1.}$$

$*$

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.

RÉPONSE:

Soit α, β et γ trois réels

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha \qquad + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha \qquad + \gamma &= 0 \; L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \gamma &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \gamma = 0 = \alpha = \beta \qquad \text{par remontée}
\end{aligned}$$

On a montré que la famille est libre comme de plus Dim $E = 3$ est le cardinal de cette famille

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } E.}$$

*

8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.

RÉPONSE:

En utilisant la matrice on trouve $f(u) = (a, a, a) = au$ et $f(v) = (1, 0, 1) = v$

$$\boxed{f(u) = a \text{ et } f(v) = v.}$$

*

9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.

RÉPONSE:

$f(w) = (a + 1, 1, a) = av + w$

$$\boxed{f(w) = av + w.}$$

*

10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T.

RÉPONSE:

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

*

11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

Comme M et T sont semblables, elles représentent le même endomorphisme de E, elles partagent les mêmes valeurs propres, et permettent toutes les deux de calculer les sous espaces propres du même endomorphisme.

M est diagonalisable si et seulement si T est diagonalisable.

Comme T est triagulaire ses valeurs propres sont ces coefficients diagonaux

$$\text{Sp}(T) = \{1, a\}$$

Calculons F_a le sous espaces propre de T associé à la valeur propre a. Soit x, y et z des réels

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_a$$

$$\Leftrightarrow TX = aX$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax & = ax \\ \quad y + az & = ay \\ \quad\quad z & = az \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ (1-a)y + az & = 0 \\ \quad (1-a)z & = \end{cases}$$

$z = y = 0$ car a est different de 0 et de 1

$$F_a = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

L'espace vectoriel propre E_a de M associé à la valeur propre a est de même dimension.
Calculons F_1 le sous espaces propre de T associé à la valeur propre 1. Soit x, y et z des réels

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1$$

$$\Leftrightarrow TX = X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax & = x \\ \quad y + az & = y \\ \quad\quad z & = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ (a-1)x & = 0 \\ \quad az & = \end{cases}$$

$z = x = 0$ car a est different de 0 et de 1

$$F_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

L'espace vectoriel propre E_1 de M associé à la valeur propre 1 est de même dimension. Donc

$$\text{Dim } E_a + \text{Dim } E_1 \neq 3 \qquad \text{Sp}(M) = \{1, a\}$$

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable dans ce cas}}$$

$*$

EXERCICE 2

ECRICOM 2015

On désigne par $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I- Premiers résultats sur l'application φ_A.

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ deux matrices et α un réel.

$$\begin{aligned} \varphi_A(M + \alpha N) &= A\,(M + \alpha N) \\ &= AM + \alpha AN \\ &= \varphi_A(M) + \alpha \varphi_A(N) \end{aligned}$$

φ_A est donc une application linéaire, de plus pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, AM est une matrice carrée d'ordre 2

$$\boxed{\text{L'application } \varphi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

$*$

2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$ où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

RÉPONSE:

Si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe un unique antécédent de I_2 par l'application φ_A c'est à dire qu'il existe une unique matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$AN = I_2$$

$\boxed{\text{SI } \varphi_A \text{ est bijectif, alors il existe une unique matrice } N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } AN = I_2.}$

*

3. Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

RÉPONSE:

La question précédente nous montre que si φ_A est bijective alors A admet une inverse à droite, ce qui suffit d'après les théorèmes du cours à démontrer que A est inversible car A est une matrice carrée. Réciproquement si A est inversible, notons B son inverse

$$AB = BA = I_2$$

et alors pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi_A \circ \varphi_B(M) &= A(BM) \\ &= (AB)M \\ &= I_2M \qquad\qquad = M \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_B \circ \varphi_A(M) &= (BA)M \\ &= I_2M = M \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_B \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

ce qui montre que φ_A est bijective et que sa bijection réciproque est $\varphi_{A^{-1}}$.

$\boxed{\varphi_A \text{ est un automorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si la matrice } A \text{ est inversible.}}$

*

II- Un exemple.

Dans cette partie et uniquement dans cette partie on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12},\ E_{21},\ E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.

<u>RÉPONSE:</u>

La matrice A est triangulaire supérieure et donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$$

Comme est est une matrice d'ordre 2 ayant deux valeurs propres distinctes

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

*

2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>RÉPONSE:</u>

- $\varphi_A(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$
- $\varphi_A(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$
- $\varphi_A(E_{21}) = AE_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} - E_{21}$
- $\varphi_A(E_{22}) = AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2E_{12} - E_{22}$

On peut donc remplir les 4 colonnes de la matrice et donc

$$\boxed{\text{La matrice de } \varphi_A \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est donc } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

*

3. Préciser les valeurs propres et les sous espaces propres de l'endomorphisme φ_A.

RÉPONSE:

La matrice T est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}.}$$

Notons $\mathcal{E}_1$ le sous espace propre associé à 1 Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur colonne

$$\begin{aligned} TX = X &\Leftrightarrow (T - I_2)U = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z & = 0 \\ 2t & = 0 \\ -2z & = 0 \\ -2t & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow z = t = 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{E}_1 = \text{Vect}\,(E_{11}, E_{12}).}$$

Notons $\mathcal{E}_{-1}$ le sous espace propre associé à -1 Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un vecteur colonne

$$\begin{aligned} TX = -X \; &\Leftrightarrow \; (T + I_2)U = 0 \\ &\Leftrightarrow \; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \; \begin{cases} 2x + 2z & = 0 \\ 2y + 2t & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \; x = -z \text{ et } y = -t \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{E}_{-1} = \text{Vect}\,(E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22}).}$$

*

4. L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

RÉPONSE:

On constate que Dim $\mathcal{E}_1$ + Dim $\mathcal{E}_{-1} = 4$ et que la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ donc

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

*

III- D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A.

On désigne par $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

1. Soit λ un réel tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant

$$\varphi_A(M) = \lambda M$$

Montrer en raisonnant par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

RÉPONSE:

On a dans ce cas

$$AM = \lambda M$$

et donc

$$(A - \lambda I_2)M = 0$$

Si $(A - \lambda I_2)$ était inversible alors

$$(A - \lambda I_2)^{-1}(A - \lambda I_2)M = (A - \lambda I_2)^{-1}0$$

et donc

$$I_2 M = 0$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses, par l'absurde on a donc montré que

$$\boxed{\text{Dans ce cas là } A - \lambda I_2 \text{ ne peut pas être inversible.}}$$

*

2. Soit μ un réel tel qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
   On note
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \quad N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
   Montrer que N et N' sont vecteurs propres de l'endomorphisme φ_A associés à la valeur propre μ.

RÉPONSE:

On a

$$AX = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

et comme X est un vecteur propre

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
AN &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax+by & 0 \\ cx+dy & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} && \text{calculs précédents} \\
&= \mu \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu N
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
AN' &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ax+by \\ 0 & cx+dy \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \mu x \\ 0 & \mu y \end{pmatrix} && \text{calculs précédents} \\
&= \mu N'
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Donc } N \text{ et } N' \text{ sont des vecteurs propres de } \varphi_A}$$

*

3. Comparer le spectre de l'endomorphisme A et le spectre de la matrice A.

RÉPONSE:

On a montré dans la question qui précède que si λ est valeur propre de A alors on trouvait des vecteurs propres associés à λ pour l'endomorphisme φ_A

$$\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(\varphi_A)$$

Dans la question qui précédait on avait montré que si λ était valeur propre de φ_A alors $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible et donc λ est valeur propre de A

$$\text{Sp}(\varphi_A) \subset \text{Sp}(A)$$

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\varphi_A)}$$

*

4. Montrer que si la matrice A est diagonalisable alors l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

RÉPONSE:

Si la matrice A est diagonalisable avec une seule valeur propre alors

$$A = \lambda I_2$$

et donc

$$\varphi_A = \lambda \text{id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

qui est diagonalisable.

Si A admet deux valeurs propres distinctes alors d'apres ce qui précède pour chacun des vecteurs propres de A on construit 2 vecteurs propres, formant une famille libre. D'après le principe de concaténation on a donc une famille libre de 4 vecteurs propres comme la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4 cette famille est une base et donc φ_A est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable alors } \varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

La réciproque est juste aussi. En effet si φ_A est diagonalisable

- Si il y a une seule valeur propre $\varphi_A = \lambda\text{id}$ et on montrerait que $A = \lambda I_2$
- SI il y a deux valeurs propres alors A admet deux valeurs propres et elle est donc diagonaisable.*
- φ_A ne peut avoir plus de deux valeurs propres car le spectre de A est celui de φ_A sont identiques.

*

EXERCICE 3

D'après ECRICOME 2015

Dans tout cet exercice N désigne une entier égal ou supérieur à 3. On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $N - 1$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

III.1 Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1 jusqu'à l'obtention de la boule noire.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

On notera pour tout entier naturel non nul i :

- N_i l'événement « On tire une boule noire lors du i-ème tirage » .
- B_i l'événement « On tire une boule blanche lors du i-ème tirage » .

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire en fixant $N = 5$.
   Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire.

RÉPONSE:

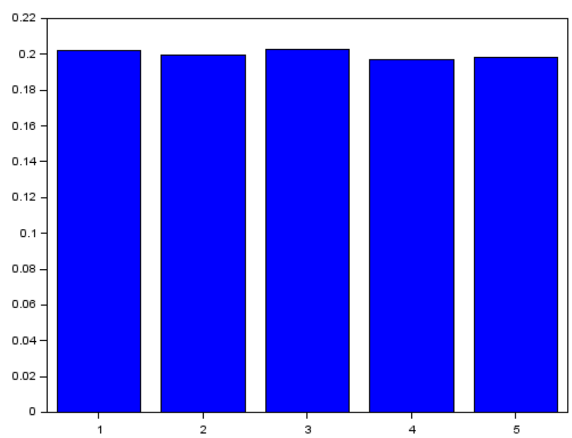
```
S=[0,0,0,0,0]
for k=1:10000
        i=1;
        M=5
        while rand()>(1. /M) then
                i=i+1
                M=M-1
        end
        S(i)=S(i)+1;
end

disp(S/10000)
bar(S/10000)
```

Explication de la ligne `while rand()>(1. /M) then`
Il y a M boules dans l'urne et une seule noire. Un nombre choisi uniformément entre 0 et 1 a une chance sur M d'être plus petit que $1/M$ ce qui correspond à la probabilité de tirer une boule noire et $1 - \frac{1}{M} = \frac{M-1}{M}$ chance d'être plus grand que $\frac{1}{M}$ ce qui correspond à la probabilité de tirer une boule blanche.

*

2. On exécute le programme complété et on obtient le graphe suivant



Quelle conjecture peut on faire sur la loi de X ?
RÉPONSE:

Il semblerait que la loi soit uniforme.

*

Pour les questions suivantes on revient au cas général $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X=2)$ et $\mathbb{P}(X=3)$?

RÉPONSE:

On $[X=1]=N_1$ donc comme en tire la boule blanche au premier tirage il y a encore N boules dont une noire

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(N_1)=\frac{1}{N}$$

On a aussi :

$$[X=2]=B_1\cap N_2$$

En utilisant le théorème des probabilités composées (qui est dans ce cas là la définition d'une probabilité conditionnelle)

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$$

Un calcul analogue au précédent nous donne $\mathbb{P}(B_1)=\dfrac{N-1}{N}$. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au premier tirage l'urne comporte $N-1$ boules dont une noire donc

$$\mathbb{P}_{B_1}(N_2)=\frac{1}{N-1}$$

et donc

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}$$

De même écrivons

$$[X=3]=B_1\cap B_2\cap N_3$$

Donc en utilisant le théorème des probabilités composées

$$\mathbb{P}([X=3])=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(N_3)$$

On calcule $\mathbb{P}_{B_1}(B_2)$ de la même façon que dans le calcul précédent

$$\mathbb{P}_{B_1}(B_2)=1-\mathbb{P}_{B_1}(N_2)=\frac{N-2}{N-1}$$

Pour calculer $\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(N_3)$ on suppose que les deux premiers tirages ont été des boules blanches alors l'urne est composée de $N-2$ boules dont une seule noire.

$$\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}=\frac{1}{N-2}$$

donc

$$\mathbb{P}([X=3])=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(N_3)=\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}=\frac{1}{N}$$

$$\boxed{\text{On a montré que } \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{N}.}$$

$*$

4. Déterminer la loi de la variable X.

RÉPONSE:

Remarque : le corrigé officiel se contente d'une réponse moins justifiée. En effet si vous avez bien démontrer les cas précédents en utilisant bien le théorèmes des probabilités composées, le correcteur sait que vous avez compris et ne vient pas vous embêter sur des problèmes formels On remarque que la boule noire peur arriver au rang 1, 2,...N et donc

$$X(\Omega)=[\![1,\,N]\!]$$

Pour $k\in[\![1,\,N]\!]$ on peut écrire

$$[X=k]=B_1\cap B_2\cap B_3\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k$$

On a encore en utilisant le théorème des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)\times\cdots\times\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots B_{k-1}}(N_k)$$

Si les $i-1$ premiers tirages ont été des boules blanches l'urne est constituée de $N-i+1$ boules dont une noire et $N-i$ blanches donc

$$\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(B_i)=\frac{N-i}{N-i+1}\qquad\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(N_i)=\frac{1}{N-i+1}$$

On obtient

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{N-3}{N-2}\times\cdots\times\frac{N-k+1}{N-k+2}\cdot\frac{1}{N-k}$$

Le produit se simplifie (télescopage)

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{N}$$

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1,\,N]\!].}$$

$*$

5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

RÉPONSE:

L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,\ N]\!]$ est $\dfrac{N(N+1)}{2}$.

*

III.2 Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne à la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie des boules sans remise jusqu'à être en mesure de reconnaitre l'urne qui a été choisie.

On note Y la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 » .
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 » .

1. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1,\ N]\!]$:

$$\mathbb{P}_{C_1}(Y=j)=\frac{1}{N}$$

RÉPONSE:

Si on suppose que C_1 est réalisé alors on tire les boules dans la première urne et donc on se place dans la situation précédente. De plus la seule faqn d'être sur que l'on l'on a choisit la première urne est de tomber à un moment sur la boule noire.

Pour $j \in [\![1,\ N]\!]$ on a $\mathbb{P}_{C_1}(X=j)=\dfrac{1}{N}$

*

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_{C_2}(Y=j)$ pour $j \in [\![1,\ N-1]\!]$ puis calculer $\mathbb{P}_{C_2}(Y=N)$.

RÉPONSE:

Lorsque l'on se place dans l'urne 2 on ne tire que des boules blanches. Avant la dernière boule on ne peut pas savoir si l'on est dans la première urne (et que l'on a pas eu de chance) ou dans la deuxième. Lors du dernier tirage, lorsque l'on tombe sur une boule blanche on est sur que l'on n'a pas choisit l'urne 1 car sinon on aurait trouvé une boule noire.

Pour $j \in [\![1,\ N-1]\!]$ on a $\mathbb{P}_{C_2}(X=j)=0$ et $\mathbb{P}_{C_2}(X=N)=1$.

*

3. Montrer que
$$\mathbb{P}(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1,\ N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

RÉPONSE:

On peut appliquer le théorème des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(C_1,\ C_2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y=j) &= \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}_{C_1}(X=j) + \mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}_{C_2}(X=j) && \text{théorèmes des probabilités totales} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_{C_1}(X=j) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{C_2}(X=j) && \text{urnes choisies au hasard} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 0 & \text{si } j \in [\![1,\ N-1]\!] \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \times 1 & \text{si } j = N \end{cases} && \text{questions précédentes et celle d'avant} \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien que

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=j) = \text{est égal à } \frac{1}{2N} \text{ si } j \in [\![1,\ N-1]\!] \text{ et à } \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \text{ si } j = N}$$

*

4. Calculer l'espérance de Y.

RÉPONSE:

Le support de Y étant fini cette variable aléatoire admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} j\mathbb{P}(Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} j\frac{1}{2N} + N \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\right) && \text{les deux cas de la question précédente} \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2N} \cdot \frac{(N-1)N}{2} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3N+1}{4} \end{aligned}$$

La variable aléatoire Y admet une espérance Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{3N+1}{4}$.

$*$

III.3 Une troisième expérience aléatoire

On effectue une série infinie de tirage avec remise dans l'urne U_1. On admet que l'on obtient presque surement au moins une boule noire et au moins une boule blanche lors de ces tirages. On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirage nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche. On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches obtenue jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche. Par exemple si les tirages ont données successivement : noire, noire, noire, blanche , blanche, noire,...alors $T = 4$ et et $U = 1$.

1. Préciser les valeurs prises par T.

RÉPONSE:

Il faut tirer au moins deux boules pour que l'on une boule noire et une boule blanche donc

$$T(\Omega) \subset \mathbb{N} \setminus \{0,\ 1\}$$

De plus si l'on tire $k-$ boules blanches suivie du tirage de la boule noire alors $[T = k]$ est réalisé, donc toutes les valeurs de $\mathbb{N} \setminus \{0,\ 1\}$ sont atteintes par T

Le support de T est $\mathbb{N} \setminus \{0,\ 1\}$

$*$

2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

RÉPONSE:

L'évènement $[T = k]$ se réalise si pour la première fois au tirage k on a une boule de chaque couleur. Pour cela les $k-1$ premiers tirages sont blancs et le $k$ieme noir ou bien les $k-1$ premiers sont noirs et le $k$ième blanc.

$$[T = k] = (B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$

et cette union est disjointe, donc

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k\right) + \mathbb{P}\left(N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k\right)$$

Les tirages se faisant avec remise et étant indépendants , pour i entier non nul

$$\mathbb{P}(N_i) = \frac{1}{N} \qquad \mathbb{P}(B_i) = \frac{N-1}{N}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=k) &= \mathbb{P}\left(B_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(B_{k-1}) \cap \mathbb{P}(N_k)) + \mathbb{P}\left(N_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(N_{k-1}) \cap \mathbb{P}(B_k)) \\
&= \underbrace{\frac{N-1}{N} \times \cdots \times \frac{N-1}{N}}_{k-1 \text{ fois}} \times \frac{1}{N} + \underbrace{\frac{1}{N} \times \cdots \times \frac{1}{N}}_{k-1 \text{ fois}} \times \frac{N-1}{N} \\
&= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \frac{N-1}{N}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \geqslant 2 \text{ on a } \mathbb{P}(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.}$$

*

3. Montrer que la variable aléatoire T possède une espérance que l'on calculera.

<u>RÉPONSE:</u>

Attention : T n'étant pas une variable aléatoire à support fini, il va falloir étudier la convergence d'une série, comme T ne prend que des valeurs positives, la convergence et la convergence absolue sont confondues.
Soit L un entier plus grand que 2

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{L} k\mathbb{P}(T=k) &= \sum_{k=2}^{L} k\left(\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{L} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{L} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{L} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{L} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) \quad \text{attention au terme } k=1
\end{aligned}$$

On reconnait alors des séries dérivées de la séries géométriques les raisons $\frac{N-1}{N}$ et $\frac{1}{N}$ sont dans l'intervalle $]-1;\,1[$ donc ces séries sont convergentes et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{N-1}{N}\right)^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} - 1\right)$$
$$= \vdots$$
$$= \frac{N^2-N+1}{N-1}$$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } T \text{ admet une espérance et cette espérance vaut } \frac{N^2-N+1}{N-1}.}$$

*

4. (a) Calculer $\mathbb{P}([U=1]\cap[T=2])$

RÉPONSE:

Si $[U=1]$ alors on a eu une boule blanche jusqu'à l'arrêt de l'expérience et si $[T=2]$ alors sur les deux premiers tirages on a eu une boule blanche et une boule noire

$$[U=1]\cap[T=2] = [T=2]$$

et en utilisant la question 2

$$\boxed{\mathbb{P}([U=1]\cap[T=2]) = \mathbb{P}(T=2) = \frac{2N-2}{N^2}}$$

*

(b) Calculer $\mathbb{P}([U=1]\cap[T=k])$ pour tout $k \geqslant 3$.

RÉPONSE:

$[U=1]\cap[T=k]$ est réalisé si et seulement si « on a obtenu les deux couleurs au bout de k tirages et on a obtenu une seule boule blanche ». La seule boule blanche ne peut être que la dernière

$$[U=1]\cap[T=k] = N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$$

Comme les tirages sont indépendants

$$\mathbb{P}([U=1]\cap[T=k]) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2)\cdots\mathbb{P}(N_{k-1})\mathbb{P}(B_k) = \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 3 \text{ on a } \mathbb{P}([U=1]\cap[T=k]) = \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}.}$$

$*$

5. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$
   (a) Calculer $\mathbb{P}([U=j]\cap[T=j+1])$

RÉPONSE:

Si il faut $j+1$ tirages pour obtenir les deux couleurs et si parmi ces $j+1$ tirages j sont des bancs seul le dernier est un noir

$$[U=j]\cap[T=j+1] = B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_j\cap N_{j+1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([U=j]\cap[T=j+1]) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j}\frac{1}{N}}$$

$*$

   (b) Que vaut $\mathbb{P}([U=j]\cap[T=k])$ pour tout entier $k \neq j+1$.

RÉPONSE:

Quand on s'arrête on ne peut pas avoir obtenu plus de boules blanches que le nombre de tirages effectués

$$j > k \Rightarrow \mathbb{P}([U=j]\cap[T=k]) = 0$$

D'après le déroulement de l'expérience on ne peut pas non plus avoir le même nombre de boules blanches que le nombre de tirages

$$j = k \Rightarrow \mathbb{P}([U=j]\cap[T=k]) = 0$$

Si $k \geqslant j+2$ si l'évènement $[U=j]\cap[T=k]$ se réalise alors pendant k tirages on a eu j boules blanches et donc $k-j \geqslant 2$ boules noires ce qui est incompatibles avec la condition d'arrêt de l'expérience. Donc

$$j \geqslant k+2 \Rightarrow \mathbb{P}([U=j]\cap[T=k]) = 0$$

$$\boxed{\text{Si } k \neq j+1 \text{ alors } \mathbb{P}([U=j]\cap[T=k]) = 0}.$$

$*$

6. Les variables aléatoires U et T sont elles indépendantes ?

RÉPONSE:

Non. Par exemple d'après ce qui précède $\mathbb{P}(U = 2] \cap [T = 2]) = 0$ et pourtant $\mathbb{P}(T = 2) \neq$ d'après ce qui précède et $\mathbb{P}(U = 2) \neq 0$ car par exemple $B_1 \cap B_2 \cap N_3$ est un exemple qui réalise $[U = 2]$ et qui est de probabilité non nulle.

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } T \text{ et } U \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

*

7. Calculer $\mathbb{P}(U = 1)$ et en déduire la loi de U.

RÉPONSE:

On utilise dans la suite le système complet d'évènements $([T = k])_{k \geqslant 2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = 1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([U = 1] \cap [T = k]) && \text{probabilités totales} \\
&= \mathbb{P}([U = 1] \cap [T = 2]) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}([U = 1] \cap [T = k]) \\
&= \frac{2N - 2}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{N - 1}{N} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} && \text{en utilisant les questions 4a et 4b} \\
&= \frac{2N - 2}{N^2} + \frac{N - 1}{N} \cdot \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} && \text{factoisation et changement d'indice} \\
&= \frac{2N - 2}{N^2} + \frac{N - 1}{N} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} && \text{formule d'une série géométrique} \\
&= \frac{2N - 2}{N^2} + \frac{1}{N^2} \\
&= \frac{2N - 1}{N^2}
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U=j) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([U=j]\cap[T=k]) && \text{probabilités totales}\\
&= \sum_{\substack{k=2\\k\neq j+1}}^{+\infty} \mathbb{P}([U=j]\cap[T=k]) + \mathbb{P}([U=j]\cap[T=j+1])\\
&= \sum_{\substack{k=2\\k\neq j+1}}^{+\infty} 0 + \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^j && \text{D'après les questions ?? et ??}\\
&= \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^j
\end{aligned}$$

On a donc déterminé la loi de U.

$\square$

*

uler $\mathbb{P}(U=1)$ et en déduire la loi de U.