Sigma de janvier 2020
Mathématiques I (composite) Mercredi 6 janvier
durée 4heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont inviter à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve , un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

EDHEC 2020

On note ${}^{t}B$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^{t}M = -M$ et on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

RÉPONSE:

Méthode 1 La matrice nulle vérifier ${}^{t}0 = 0 = -0$ donc

$$0 \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

Soit M et N deux matrices de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel alors

$${}^{t}(\lambda M + N) = \lambda {}^{t}M + {}^{t}N = \lambda(-M) + (-N) = -(\lambda M + N)$$

donc

$$\lambda M + N \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

$$\boxed{\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Méthode 2 L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}-n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}-n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & {}^{t}M + M \end{array}$$

est une application linéaire car c'est la somme de l'identité et de la transposition toutes deux linéaires. De plus

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker } \varphi$$

$$\boxed{\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

*

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \left({}^{\mathrm{t}}A\right) M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}f(M) &= {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)M + MA \\
&= {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)M + {}^{\mathrm{t}}MA \\
&= {}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) + {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}M \\
&= {}^{\mathrm{t}}MA + {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}M \\
&= -MA + ({}^{\mathrm{t}}A)(-M) && \text{car } M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \\
&= -f(M)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(M) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

*

(b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

RÉPONSE:

Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'application est linéaire
Soit M et N deux matrices de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel

$$\begin{aligned}
f(M+\lambda N) &= ({}^{\mathrm{t}}A)(M+\lambda N) + (M+\lambda N)A \\
&= ({}^{\mathrm{t}}A)M + \lambda({}^{\mathrm{t}}A)N + MA + \lambda NA \\
&= ({}^{\mathrm{t}}A)M + MA + \lambda(({}^{\mathrm{t}}A)N + NA) \\
&= f(M) + \lambda f(N)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

*

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$

RÉPONSE:

Ces trois matrices sont anisymétriques Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3

$$
\begin{aligned}
M_i n\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) \;&\Leftrightarrow\; {}^{\mathrm{t}}M = -M \\
&= \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & f \\ c & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a & = -a \\ b & = -d \\ c & = -g \\ d & = -b \\ e & = -e \\ f & = -h \\ g & = -c \\ h & = -f \\ i & = -i \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a & = e = i = 0 \\ d & = -b \\ g & = -c \\ h & = -f \end{cases} \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M = bJ + cK + fL
\end{aligned}
$$

$$\boxed{J,\ K,\ L \text{ forment une famille génératrice de } \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

*

(b) Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$

RÉPONSE:

Soit α, β et γ des réels, supposons que

$$\alpha J + \beta K + \gamma L = 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } (J, K, L) \text{ est libre}}$$

Avec la question précédente on en déduit que (J, K, L) est une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est donc

$$\boxed{\text{Dim } \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = 3}$$

*

4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

RÉPONSE:

On a

$$^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -J - L$$

$$f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$f(L)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=-L$$

*

(b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$

RÉPONSE:

Da'près un théorème du cours , comme J, K, L forment une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$

$$\text{Im } f=\text{Vect}\,(f(J),f(K),f(L))=\text{Vect}\,(-J-L,0,-L)=\text{Vect}\,(J,L)$$

et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires

$$\boxed{(J,L)\text{ forment une base de Im } f}$$

*

(c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

RÉPONSE:

D'après le théorème du rang

$$\text{Dim Ker } f+\text{Dim Im } f=\text{Dim } \mathscr{A}_3(\mathbb{R})=3$$

$$\boxed{\text{Dim Ker } f=1}$$

On a constaté que $f(K)=0$ ce qui démontre

$$K\in\text{Ker } f$$

et donc comme Dim Ker $f=1$

$$\boxed{(K)\text{ est une base de Ker } f}$$

*

5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base B. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1;0\}$

RÉPONSE:

D'après les calculs précédents

$$\boxed{F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$*$

(b) En déduire les valeurs propres de f

RÉPONSE:

Les valeurs propres de f sont celles de sa matrice F comme F est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux

$$\boxed{\text{Sp}(jf) = \text{Sp}(F) = \{0, -1\}}$$

$*$

(c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$. Determiner le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

RÉPONSE:

$F + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car les deux premiéres colonnes ne sont pas colinéaires.

$\boxed{rg(F + I) = 2}$ On en déduit que

Dim Ker $(f - (-1Id)) = 3 - 2 = 1$

La dimension du sous espace propre associé à la valeur propre -1 pour f est 1.
On a vu lors de l'étude du noyau que la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre 0 était 1, donc comme 0 et -1 sont les seules valeurs propres de f

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

$*$

EXERCICE 2

EML 2018

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[\,,\quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

RÉPONSE:

La fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de deux fonctions usuelles.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Donc

x	0		1		$+\infty$
Signe de f'(x)	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

La limite en zéro n'est pas une forme indéterminée.

$$\ln x =_{+\infty} o(x)$$

donc

$$x - \ln x \sim_{+\infty} x$$

ce qui justifie la limite en $+\infty$.

*

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

RÉPONSE:

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\,1[$, elle induit donc une bijection de $]0;\,1[$ vers $]f(1);\,\lim_{x\to 0^+}[\,=\,]1;\,+\infty[$ comme 2 appartient à cette intervalle,$f(x)=2$ admet une unique solution sur $]0;\,1[$.
La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]1;\,+\infty[$, elle induit donc une bijection de $]1;\,+\infty[$ vers $]f(1);\,\lim_{x\to+\infty}[\,=\,]1;\,+\infty[$ comme 2 appartient à cette intervalle,$f(x)=2$ admet une unique solution sur $]1;\,+\infty[$.
Comme 1 n'est pas solutions les deux solutions trouvées sont les seules sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x)=2, \text{, admet exactement deux solutions sur }]0;\,+\infty[\text{, telles que } 0<a<1<b.}$$

*

3. Montrer : $b\in[2;\,4]$. On donne $\ln(2)\approx 0,7$.

RÉPONSE:

On a $f(2)=2-\ln 2<2$ et $f(4)=4-\ln 2=4-2\ln 2$ qui est d'après l'indication plus grand que 2.

$$f(2)<f(b)<f(4)$$

Comme f est croissante sur $[1;\,+\infty[$

$$2<b<4$$

$$\boxed{b\in[2;\,4].}$$

*

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(u_n)+2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\in[b;\,+\infty[$.

RÉPONSE:

- **Initialisation** u_0 appartient bien à $[b;\,+\infty[$ car $b<4$
- **Hérédité** Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé, supposons que u_n existe et appartient à $[b;\,+\infty[$ Alors comme $u_n\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln u_n$ existe de plus comme $\ln$ est croissante

  $$\ln b+2<\ln u_n+2$$

  or $f(b)=2$ donc $b=\ln b+2$ donc

  $$b<\ln u_n+2$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \in [b;\, +\infty[}$$

$*$

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

RÉPONSE:

Comme f est croissante sur $[1;\, +\infty]$.

$$\forall x \in [b;\, +\infty[\qquad f(b) \leqslant f(x)$$

et $f(b) = 2$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2 \leqslant u_n - \ln u_n$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2 + \ln u_n \leqslant u_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leqslant u_n$$

Donc la suite est décroissante et minorée par b, elle converge vers une limite que l'on note $\ell \in [b;\, +\infty[$.
la fonction $x \mapsto \ln x + 2$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème du point fixe

$$\ell = \ln \ell + 2$$

Les deux possibilités sont a et b et comme $\ell \geqslant b$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } b.}$$

$*$

6. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $\varphi x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $[b;\, +\infty[$ et

$$\forall x \in [b;\, +\infty[\qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x}$$

donc comme $b > 2$

$$\forall x \in [b;\, +\infty[\qquad \varphi'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[b;\, u_n]$

$$\varphi(u_n) - \varphi(b) \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$$

or
$\varphi(u_n) - \varphi(b) = u_{n+1} - (\ln(b) + 2) = u_{n+1} - b$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)}$$

*

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

RÉPONSE:

- **Initialisation** $u_0 - b = 4 - b$ et comme $2 < b < 4$ $0 \leqslant u_0 - b < 2$
- **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

On sait déjà que $u_{n+1} \geqslant b$ de plus

$$u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

- **Conclusion** D'après le principe de récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

*

7. (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

RÉPONSE:

```
function u = suite(n)
        u=4
        for i = 1:n
                u=log(u) + 2
        end
endfunction
```

*

(b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de` b `à epsilon près.`

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2         n = 0
3         while 1/(2^(n-1))>epsilon
4                 n = n+1
5         end
6         b = suite(n)
7 endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\ \mathrm{d}t.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0;\ +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;\ +\infty[\,, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

RÉPONSE:

f étant stricment positive sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ y est continue.
D'après le théorème fondamental de l'analyse, si nous notons G une primitive de la fonction continue $g : t \mapsto \frac{1}{f}(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, G est de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Phi(x) = G(2x) - G(x)$$

Donc par composition et somme Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\
&= 2g(2x) - g(x) \\
&= 2\frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \\
&= \frac{2x - 2\ln x - 2x + \ln(2x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))} \\
&= \frac{-2\ln x + \ln(2) + \ln x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \left]0;\, +\infty\right[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}}$$

$*$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0;\, +\infty[$.

RÉPONSE:

On sait que pour $x > 0$ $f(x) = x - \ln x$ est plus grand que 1, donc $(x - \ln(x))$ et $(2x - \ln(2x)$ sont strictement positifs.
$\Phi'(x)$ est du signe de $\ln 2 - \ln x$

x	0		2		$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de Φ	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

$*$

10. Montrer : $\forall x \in \left]0;\, +\infty\right[$, $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
D'après la première question

$$\forall t \in [x;\, 2x] \qquad 1 \leqslant f(t)$$

donc

$$\forall t \in [x;\, 2x] \qquad 0 \leqslant \frac{1}{f(t)} \leqslant \frac{1}{1}$$

comme $x \leqslant 2x$, par croissance de l'intégration

$$0 \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\forall x \in \left]0;\, +\infty\right[,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

*

11. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

RÉPONSE:

On a

$$\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{x\to 0}$$

Donc d'après le théorème des encadrements et l'inégalité précédente

$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = 0$$

$$\boxed{\text{En posant } \Phi(0) = 0\text{, on prolonge } \Phi \text{ par continuité}}$$

*

(b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet quer la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

RÉPONSE:

On a $\lim_{x\to 0} x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty$ donc $x =_0 o(\ln x)$ et

$$x - \ln x \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$$

de même

$$2x - \ln x \underset{x\to 0}{\sim} -\ln 2x \qquad \ln 2 - \ln x \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$$

donc

$$\Phi'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{\ln 2x}$$

Comme $\lim_{x\to 0^+} \ln 2x = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \Phi'(x) = 0.}$$

*

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

RÉPONSE:

$\square$

*

EXERCICE 3

EML 2018

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. **a.** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

RÉPONSE:

Notons pour $i \in \mathbb{N}^*$, P_i : « on obtient pile au tirage i » et F_i : « on obtient face au tirage i »

$$[X = 0] = P_1 \cap P_2$$

donc par indépendance des tirages

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$[X = 1] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

Donc par incompatibilité des événements

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

et comme les tirages sont indépendants

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$[X = 2] = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4)$$

Donc de même que précédemment

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0)=\frac{4}{9},\ \mathbb{P}(X=1)=\frac{8}{27}\text{ et, }\mathbb{P}(X=2)=\frac{4}{27}\ .}$$

*

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left([X=n]\right)=(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$[X=n]$ est réalisé si et seulement si le tirage $n+2$ donne pile, et parmi les $n+1$ premier tirage un et un seul est un pile

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \underbrace{\binom{n+1}{1}}_{\text{choix de la place du 1er tirage pile}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\\ &= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous entier naturel } n,\ \mathbb{P}\left([X=n]\right)=(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}\ .}$$

*

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne. On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

RÉPONSE:

D'après ce qui précède la première étape peut avoir comme résultats tous les entiers de $\mathbb{N}$, et donc comme la deuxièmes étape peut se faire dans une urne dont les boules sont numérotées de 0 à un entier arbitrairement grand, tous les entiers naturels sont des issues possibles de la seconde étape.

$$\boxed{U(\Omega)=\mathbb{N}.}$$

*

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

RÉPONSE:

Supposons $[X = n]$ réalisé, alors l'urne comporte $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. Le tirage étant honnête, la probabilité de choisir chaque boule est égale. De plus on ne peut pas obtenir une boule dont le numéro est plus grand que n.

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}\text{, alors pour } k \text{ entier } \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.}$$

*

c. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}\left([U = k]\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}\left([X = n]\right) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}\left([U = k]\right) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

RÉPONSE:

Appliquons le théorème des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$, car d'après la première partie aucune des probabilités $\mathbb{P}(X = n)$ n'est nulle.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left([U = k]\right) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=n]}(U = k)\mathbb{P}\left([X = n]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} 0 \cdot \mathbb{P}\left([X = n]\right) + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}\left([X = n]\right) && \text{Question précédente} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} : \mathbb{P}\left([U = k]\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \mathbb{P}\left([X = n]\right).}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}([X=n]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}(n+1)\frac{4}{3^{n+2}} && \text{partie précédente} \\
&= 4\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
&= 4\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+k+2}} && \text{en posant } n=k+i \\
&= \frac{4}{9\cdot 3^k}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \\
&= \frac{4}{9\cdot 3^k}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} && \text{somme d'une série géométrique convergente de raison } \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ de } \mathbb{N} : \mathbb{P}([U=k]) = \frac{2}{3^{k+1}}\ .}$$

*

d. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

RÉPONSE:

On peut faire le calcul directement en s'inspirant fortement des calculs effectués pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
On peut aussi remarquer que si l'on note $X' = X+1$, X' a pour support $\mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel k.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X'=k) &= \mathbb{P}(X+1=k) \\
&= \mathbb{P}(X=k-1) \\
&= \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

$$X' = X+1 \hookrightarrow \mathbb{G}\left(\frac{2}{3}\right)$$

Donc X' admet une espérance et une variance

$$E(X') = \frac{3}{2} \qquad V(X) = \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

On sait de plus

$$E(X) = E(X' - 1) = E(X') - 1 \qquad V(X+1) = V(X)$$

$$\boxed{X \text{ admet une variance et une espérance et } E(X) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{3}{4}\,.}$$

*

3. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

RÉPONSE:

On sait que l'urne peut à l'issue de la première étape, comporter des boules numérotées de 0 à n où n est un nombre arbitrairement grand. le numéro de la boule est toujours plus petit ou égal au numéro de l'urne donc les valeurs de V sont des entiers positifs, et de plus comme n est arbitrairement grand et que la boule peut porter le numéro 0, V peut prendre comme valeur tous les entiers naturels.

$$\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

*

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $[X = n]$ réalisé et soit $k \in [\![0,\, n]\!]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X=n]}(V = k) &= \mathbb{P}_{[X=n]}(X - U = k) \\ &= \mathbb{P}_{[X=n]}(n - U = k) \\ &= \mathbb{P}_{[X=n]}(U = n - k) \\ &= \frac{1}{n+1} \qquad\qquad \text{question } \textbf{b.} \end{aligned}$$

Si $k > n$ alors

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(V = k) = 0$$

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ alors pour } k \text{ entier } \mathbb{P}_{[X=n]}(V = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.}$$

*

c. En déduire la loi de V.
RÉPONSE:

Comme les lois conditionnelles sachant $[X = n]$ réalisé sont identiques

$$\boxed{X \text{ et } V \text{ suivent la même loi.}}$$

*

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
RÉPONSE:

On constate que $U + V = X$.
Soit i et j deux entiers naturels

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U = i] \cap [V = j]) &= \mathbb{P}([U = i] \cap [X = j + i]) \\
&= \mathbb{P}_{[X=j+i]}([U = i])\mathbb{P}(X = j + i) \\
&= \frac{1}{i + j + 1}\mathbb{P}(X = j + i) \qquad = \frac{1}{i + j + 1}\frac{4(n + 1)}{3^{i+j+2}} \text{ loi de } X \\
&= \frac{4}{3^{i+j+2}}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(U = i)\mathbb{P}(V = j) = \frac{2}{3^{i+1}} \cdot \frac{2}{3^{j+1}} \qquad \text{lois de } U \text{ et } V = \frac{4}{3^{i+j+2}}$$

Donc

$$\forall i \in U(\Omega) \times V(\Omega) \qquad \mathbb{P}([U = i] \cap [V = j]) = \mathbb{P}(U = i)\mathbb{P}(V = j)$$

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$$

*

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;

- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. Simulation informatique

a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

RÉPONSE:

```
function x=simule_X()
        nb_faces=0
        nb_piles=0
        while nb_piles<2
                p=rand()
                if p<2/3 then
                        nb_piles=nb_piles+1
                else
                        nb_faces=nb_faces+1
                end
        end
        x=nb_faces
endfunction
```

*

b. On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
        r = 0
        N = 10^4
        for k = 1:N
                x = simule_X()
                y = simule_Y(p)
                if x <= y then
                        r = r + 1/N
                end
        end
endfunction
```

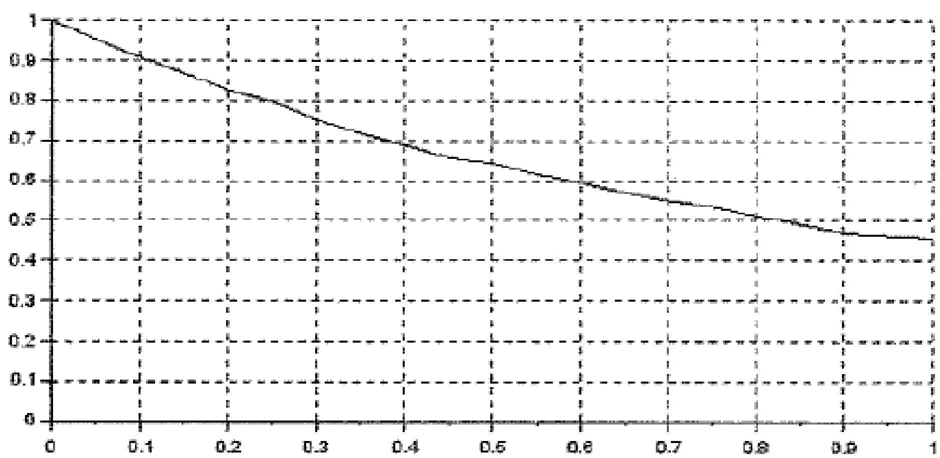
RÉPONSE:

On simule N fois le jeux avec N est très grand. À chaque fois que le joueur A gagne c'est à dire quand $X \leqslant Y$, on rajoute $1/N$ à r. Cela revient à calculer la fréquence des victoires de A car pour calculer la fréquence on divise le nombre de victoires par le nombre de parties, donc chaque victoire "rapporte" $1/N$.
On aurait pu écrire

```
function r = mystere(p)
    r = 0
    N = 10^4
    for k = 1:N
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y then
            r = r + 1
        end
    end
    r =/N
endfunction
```

*

c. On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

RÉPONSE:

Le jeu est équilibré quand les deux jopueurs ont la même chance de gagner, ce qui ce voit quand la courbe passe par l'ordonnée 0.5.

$\boxed{\text{On peut estimer que le jeu est équilibré pour } p = 0,8.}$

*

Bonus Voici un programme qui trace le graphe précédent.

```
function x=simule_X()
        nb_faces=0
        nb_piles=0
        while nb_piles<2
                p=rand()
                if p<2/3 then
                        nb_piles=nb_piles+1
                else
                        nb_faces=nb_faces+1
                end
                end
        x=nb_faces
endfunction

function y=simule_Y(p)
        y=0 //nb de face
        while rand()>p //obtenir un pile
                y=y+1
        end
endfunction

function r = mystere(p)
        r = 0
        N = 10^4
        for k = 1:N
                x = simule_X()
                y = simule_Y(p)
                if x <= y then
                        r = r + 1/N
                end
        end
endfunction

absc=[]
ord=[]


for p=0.01:0.01:0.99 // toute les valeurs de p> 0 et <1 par pas de 0.01
        absc=[absc,p]
        ord=[ord,mystere(p)]
end

plot(absc,ord)
```

6. **Étude de la variable aléatoire Y**
   On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

   a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

Z suit la loi géométrique de paramètre p

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p),\ E(Z) = \frac{1}{p},\ V(Z) = \frac{1-p}{p^2}\ .}$$

$*$

b. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

RÉPONSE:

Dans cette expérience le nombre de lancers est égal au nombre de faces obtenue plus 1.

$$Z = Y + 1$$

donc

$$Y = Z - 1$$

On obtient donc

$$E(Y) = E(Z) - E(1) = \frac{1}{p} - 1$$

par linéarité de l'espérance et

$$V(Y) = V(Z)$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{1-p}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

$*$

c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left([Y \geqslant n]\right) = (1-p)^n$.

RÉPONSE:

Il ya de nombreuse méthodes pour répondre à cette question, en voici une.
Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} [Y \geqslant n] &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Y = k] \\ &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Z - 1 = k] \\ &= \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Z = k + 1] \end{aligned}$$

Comme les événements de cette union sont incompatibles

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geqslant n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k+1) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k+1-1} p && \text{définiton de la loi géométrique} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k} p \\
&= p \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+n} && \text{changement d'indice } k = j+n \\
&= p(1-p)^n \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j} \\
&= p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} && \text{somme totale d'une série géométrique} \\
&= (1-p)^n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left([Y \geqslant n]\right) = (1-p)^n..}$$

*

7. **a.** Montrer : $\mathbb{P}\left([X \leqslant Y]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = n]\right) \mathbb{P}\left([Y \geqslant n]\right)$.

RÉPONSE:

Utilisons le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([X \leqslant Y]\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = n] \cap [Y \leqslant X]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = n] \cap [Y \leqslant n]\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = n\right) \mathbb{P}\left(Y \geqslant n\right) && \text{car les variables sont indépendantes}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left([X \leqslant Y]\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X = n]\right) \mathbb{P}\left([Y \leqslant n]\right).}$$

*

b. Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant Y]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n])\,\mathbb{P}([Y \leqslant n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}(1-p)^n && \text{première partie et questions précédentes} \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1-p}{3}\right)^{n-1} && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{4}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{3}\right)^2} && \text{série dérivée de la série géométrique avec } 0 < \frac{1-p}{3} < 1/3 \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \frac{4}{(2+p)^2}.}$$

*

c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

RÉPONSE:

Le jeu est équilibré si et seulement si la probabilité précédente est égale à $0,5$.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow (2+p)^2 = 8 \\
&\Leftrightarrow 2+p = \sqrt{8} \text{ ou } 2+p = -\sqrt{8} \\
&\Leftrightarrow p = 2(\sqrt{2}-1) \text{ ou } p = 2(-\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

La deuxième solution est négative. Comme $\sqrt{2} > 1$ la première est positive et on peut montrer[1] en utilisant $8 < 9$ que la deuxième solution est plus petite que 1

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré pour } p = 2\sqrt{2}-2.}$$

1. laissé en exercice

*

Remarque : une valeur approchée à 10^{-2} près est $0,82$