

Continuité et calcul différentiel pour les fonctions de deux variables.

ECE 2 Lycée international de Valbonne



5 janvier 2021

Table des matières

I Introduction	2
I.1 Premiers exemples	2
I.2 Scilab	2
II Continuité	5
II.1 Préliminaires	5
II.2 Définitions et propriétés.	6
III Dérivabilité au premier ordre	8
III.1 Définitions	8
III.2 Opérations	9
III.3 Gradient et développement limité à l'ordre 1.	10
IV Dérivabilité au deuxième ordre.	12
IV.1 Définitions.	12
IV.2 Opérations	13
IV.3 Théorème de Schwarz et matrice hessienne	14

I Introduction

I.1 Premiers exemples

On va étudier des fonctions du type

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy & (x, y) \mapsto x + y \end{aligned}$$

Parfois ces fonctions ne seront pas définies sur $\mathbb{R}^2$ en entier mais sur un sous ensemble (simple) de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R} & : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x}\sqrt{y} & (x, y) \mapsto x\sqrt{y} \end{aligned}$$

I.2 Scilab

Pour tracer la surface représentative d'une fonction de ce type on utilise `plot3d` ou `fplot3d`

```
X=[-2:0.1:2]  
Y=[-2:0.1:2]
```

```
function z=f(x,y)  
    z=x^2-y^2  
endfunction
```

```
Z=feval(X,Y,f)
```

```
plot3d(X,Y,Z,theta=55,alpha=45)
```

Les paramètres `theta=55` et `alpha=45` indique sous quels angles¹ on observe la surface.
On peut aussi utiliser :

```
X=[-2:0.1:2]  
Y=[-2:0.1:2]
```

1. en coordonnées sphériques

```
function z=f(x,y)
    z=x^2-y^2
endfunction
```

```
fplot3d(X,Y,f,theta=55,alpha=45)
```

Dans certains cas le script suivant fonctionnera

```
X=[-2:0.1:2]
Y=[-2:0.1:2]
```

```
function z=f(x,y)
    z=x^2-y^2
endfunction
```

```
plot3d(X,Y,f(X,Y),theta=55,alpha=45)
```

Définition 1 (Lignes de niveaux).

Si f est une fonction de deux variables réelles et λ est une constante alors une ligne de niveau est l'ensemble des points (x, y) du plan qui vérifient

$$\lambda = f(x, y)$$

Voici un exemple en scilab utilisant la fonction contour

```
clf
X=[0:0.1:4]
Y=[0:0.1:4]

function z=f(x,y)
    z=x^(0.2)*y^(0.8)//fonction de Cobb-Douglas
endfunction

subplot(1,2,1)
fplot3d(X,Y,f,theta=15,alpha=55)
subplot(1,2,2)
contour(X,Y,f,[0:0.5:4])
```

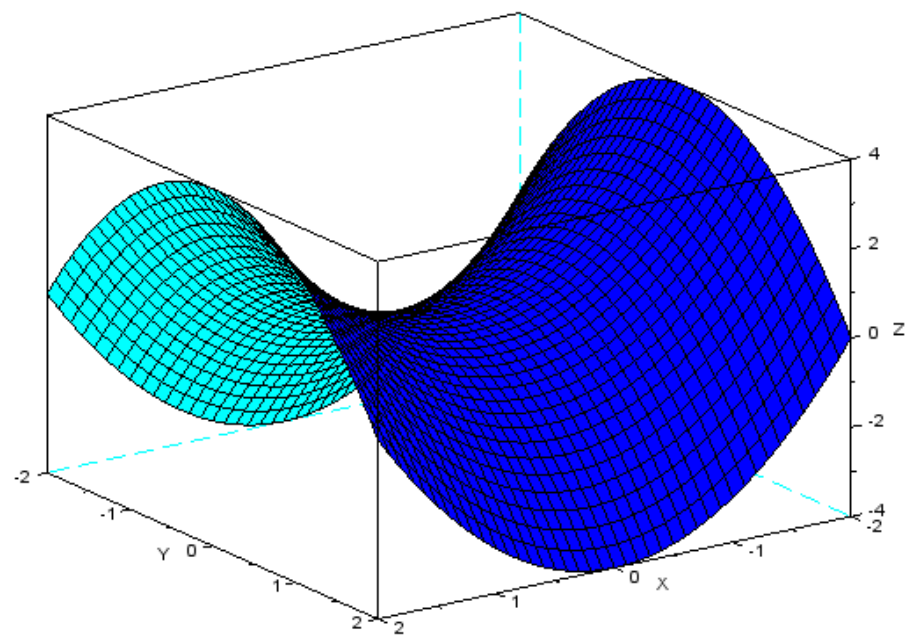


FIGURE 1 – Graphe de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

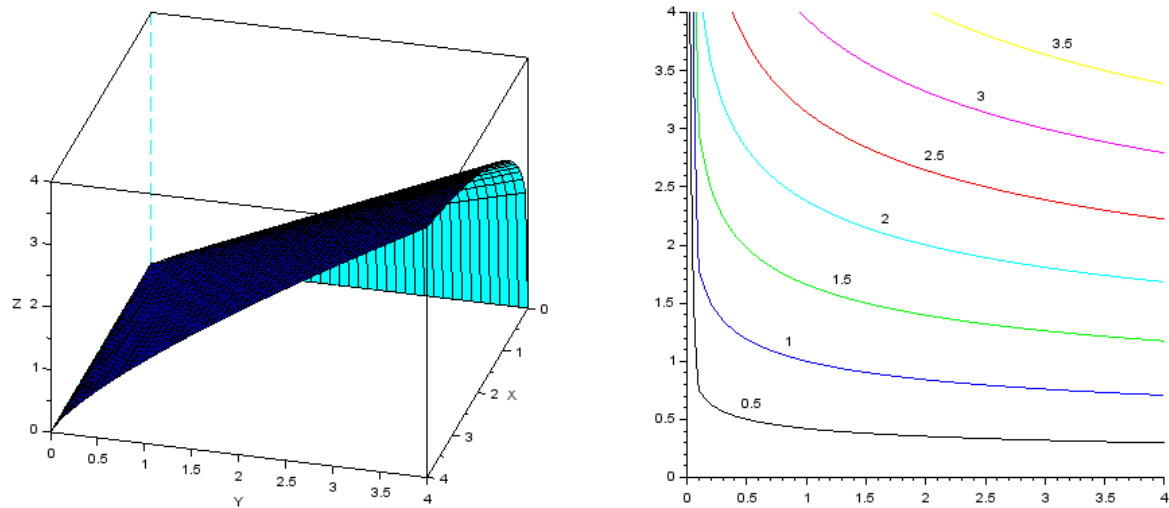


FIGURE 2 – Une fonction de Cobb-Douglass et ses lignes de niveaux.

Avec l'argument $[0 : 0.5 : 4]$ on indique que l'on veut que les lignes de niveaux soient tracées pour $\lambda \in \{0, 0.5, 1, \dots, 4\}$

II Continuité

Dans toute la suite les fonctions de deux variables réelles sont définies sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ « simple ». Ce sera très souvent $\mathbb{R}^2$.

II.1 Préliminaires

$\mathbb{R}^2$ est représenté par le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, un couple (x, y) est un point du plan.

Définition 2 (Distance euclidienne).

La *distance euclidienne* entre deux points (x, y) et (x_0, y_0) est le réel

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Proposition 1.

Soit (x, y) et (x_0, y_0) deux points alors

- $d((x, y), (x_0, y_0)) \geq 0$
- $d((x, y), (x_0, y_0)) = 0$ si et seulement si
- $d((x, y), (x_0, y_0)) = d((x_0, y_0), (x, y))$

Définition 3 (Rappel continuité d'une fonction d'une variable).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$ on dit que f est **continue en** x_0 si et seulement si Pour tout ε strictement positif il existe un réel α strictement positif tel que pour tout $x \in I$ si la distance $|x - x_0|$ est plus petite que α alors la distance $|f(x) - f(x_0)|$ est plus petite que ε

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La valeur absolue entre deux réels est une distance.

C'est à dire que f est aussi proche que l'on veut de sa valeur en x_0 à condition que x soit suffisamment proche de x_0 .

II.2 Définitions et propriétés.

On va adapter cette définition à une fonction de deux variables à valeurs réelles.

Définition 4 (Continuité en un point).

Soit f une fonction de deux variables réels à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$.

Alors f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad d((x, y), (x_0, y_0)) < \alpha \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Définition 5 (Continuité sur un ensemble).

Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles et soit $\mathcal{D}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est **continue sur** (l'ensemble) $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est continue en chacun des points de $\mathcal{D}$.

Proposition 2 (Continuité des fonctions coordonnées).

Les deux fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} & : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x & (x, y) \mapsto y \end{array}$$

Proposition 3 (Opérations de base).

Soit f et g deux fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles qui sont continues en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Alors

- $f + g$ est continue en (x_0, y_0) .
- fg est continue en (x_0, y_0) .
- Si de plus $g(x_0, y_0) \neq 0$ alors f/g est continue en (x_0, y_0) .

Proposition 4 (Fonctions polynomiales).

Les fonctions polynomiales à deux variables x et y sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple : $(x, y) \mapsto xy, (x, y) \mapsto xy^2 - 2x^2 + xy$ sont continues.

Proposition 5 (Composition).

Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et soit φ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f et φ sont continues sur leur ensemble de définition alors $\varphi \circ f$ est continue sur

Exemple : $(x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ et $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ sont continue sur leur ensemble de définition.

Méthode principale pour la continuité

De la même manière que pour une fonction d'une variable réelle, pour montrer qu'une fonction de deux variables est continue on n'utilise presque jamais la définition mais les opérations somme multiplication, quotient (en justifiant la non nullité) et composition en précisant les ensembles.

III Dérivabilité au premier ordre

III.1 Définitions

Définition 6 (Dérivée partielle d'ordre 1).

Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit (x, y) un point où f est définie.

- Dérivée selon la première variable. Si la fonction $\varphi : \square \mapsto f(\square, y)$ (avec y constant) est dérivable alors on note

$$\partial_1(f)(x, y) = \varphi'(x)$$

C'est la première **dérivée partielle**, ou la dérivée (partielle) selon la première variable, ou la dérivée (partielle) selon la direction x .

- Dérivée selon la deuxième variable. Si la fonction $\psi : \triangle \mapsto f(x, \triangle)$ (avec x constant) est dérivable alors on note

$$\partial_2(f)(x, y) = \psi'(y)$$

C'est la première **dérivée partielle** ou la dérivée (partielle) selon la deuxième variable, ou la dérivée partielle selon la direction y .

Remarque : On trouve aussi les notations $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.

Exemple : L'étude des ensembles de définitions des fonctions suivantes sont laissées en exercice.

1. $f : (x, y) \mapsto xy^2$ alors $\partial_1(f)(x, y) = y^2$ et $\partial_2(f)(x, y) = 2xy$
2. $g : (x, y) \mapsto x + y^2$ alors $\partial_1(g)(x, y) = 1$ et $\partial_2(g)(x, y) = 2y$
3. $h : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$ alors $\partial_1(h)(x, y) = 2xe^{x^2+y^2}$ et $\partial_2(h)(x, y) = 2ye^{x^2+y^2}$

Définition 7 (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$).

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$ si et seulement si

- En tout point de $\mathcal{D}$ elle est dérivable selon les deux variables
- Et si $(x, y) \mapsto \partial_1(f)(x, y)$ et si $(x, y) \mapsto \partial_2(f)(x, y)$ sont continues sur $\mathcal{D}$.

Exemple : Toutes les fonctions de l'exemple précédent sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$



Proposition 6 (Lien entre continuité et $\mathcal{C}^1$).
Si f est dérivable sur $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}$.



Attention : La réciproque est fausse on pourra par exemple étudier $(x, y) \mapsto |x + y|$ en 0

III.2 Opérations

Proposition 7 (Opérations de base.).
Soit f et g deux fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ alors

- $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
- fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.
- Si de plus g n'est pas nulle sur $\mathcal{D}$, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Proposition 8 (Fonctions polynomiales).
Les fonctions polynomiales à deux variables x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple : $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto xy^2 - 2x^2 + xy$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 9 (Composition).
Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et soit φ une fonction sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition alors $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.



Méthode principale pour la classe $\mathcal{C}^1$

De la même manière que pour une fonction d'une variable réelle, pour montrer qu'une fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ on n'utilise presque jamais la définition mais les opérations somme multiplication, quotient (en justifiant la non nullité) et composition en précisant bien les ensembles.

III.3 Gradient et développement limité à l'ordre 1.



Remarque : Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs colonnes à deux lignes alors

$${}^tU \cdot V =$$

Quelle est la nature de cet objet? On l'appelle le **produit scalaire**.

Définition 8 (Gradient).

Quand une fonction est de classe C^1 sur l'ensemble $\mathcal{D}$ on note

$$\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix}$$

C'est le **gradient de f** en (x, y) .

Proposition 10 (Développement à l'ordre 1).

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{D}$ et (x, y) un point à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Alors il existe une fonction $(h, k) \mapsto \varepsilon(h, k)$ telle que pour h et k suffisamment petits :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + {}^t\nabla(f)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k)$$

telle que ε soit continue en $(0, 0)$ et $\varepsilon(0, 0) = 0$

Remarque : $\sqrt{h^2 + k^2}$ est la distance euclidienne entre les points (x, y) et $(x + h, y + k)$.

Exercice : Écrire la forme développée de cette relation.

Proposition 11 (Unicité d'un DL1).

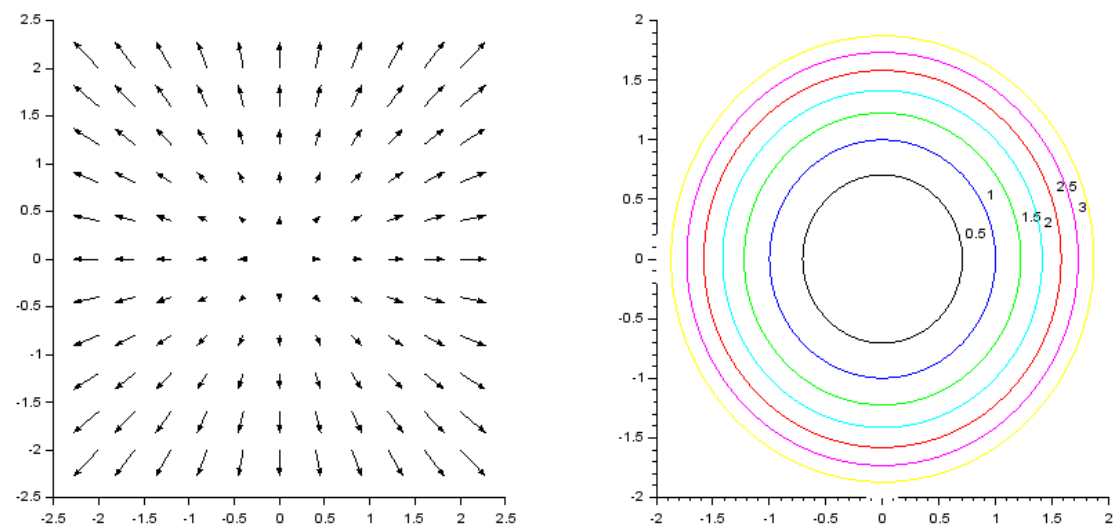


FIGURE 3 – Lignes de niveau et gradient pour $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathcal{D}$ et (x, y) un point à l'intérieur de $\mathcal{D}$.
Si il existe a et b deux réels et si il existe une fonction $(x, y) \mapsto \varepsilon(x, y)$ h et k suffisamment petits,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k)$$

telle que ε soit continue en $(0, 0)$ et $\varepsilon(0, 0) = 0$.

Alors

$$a = \partial_1 f(x, y) \quad b = \partial_2 f(x, y)$$

IV Dérivabilité au deuxième ordre.

IV.1 Définitions.



Remarque : Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur colonne à deux lignes et $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symétrique d'ordre 2

$${}^t U \cdot A \cdot U =$$

.

Définition 9 (Dérivées partielles d'ordre 2).

Soit f une fonction de classe C^1 sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées sont elles même des fonctions définies sur $\mathcal{D}$. Si on peut dériver ces fonctions on note alors :

$$\partial_{1,1}^2(f) = \partial_1 (\partial_1(f))$$

$$\partial_{1,2}^2(f) = \partial_1 (\partial_2(f))$$

$$\partial_{2,1}^2(f) = \partial_2 (\partial_1(f))$$

$$\partial_{2,2}^2(f) = \partial_2 (\partial_2(f))$$



Attention : L'écriture $\partial_2 (\partial_1(f))$ indique que l'on dérive par rapport à x puis par rapport à y .

Exemple :

Définition 10.

Classe $\mathcal{C}^2$ Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées sont elles même des fonctions définies sur $\mathcal{D}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ si les fonctions suivantes sont définies et continues sur $\mathcal{D}$.

$$(x, y) \mapsto \partial_{1,1}^2(f)(x, y)$$

$$(x, y) \mapsto \partial_{1,2}^2(f)(x, y)$$

$$(x, y) \mapsto \partial_{2,1}^2(f)(x, y)$$

$$(x, y) \mapsto \partial_{2,2}^2(f)(x, y)$$

IV.2 Opérations**Proposition 12** (Opérations de base.).

Soit f et g deux fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ alors

- $f + g$ est
- fg est
- Si de plus $g \neq 0$ alors f/g est

Proposition 13 (Fonctions polynomiales).

Les fonctions polynomiales à deux variables x et y

Exemple : $(x, y) \mapsto xy, (x, y) \mapsto xy^2 - 2x^2 + xy$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 14 (Composition).

Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et soit φ une fonction sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Méthode principale pour la classe $\mathcal{C}^2$

De la même manière que pour une fonction d'une variable réelle, pour montrer qu'une fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^2$ on n'utilise presque jamais la définition mais les opérations somme multiplication, quotient (en justifiant la non nullité) et composition en précisant bien les ensembles.

IV.3 Théorème de Schwarz et matrice hessienne

Théorème 1 (Schwarz).

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et si x, y est un point de $\mathcal{D}$ alors

$$\partial_{1,2}^2(f)(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y)$$

Définition 11 (Matrice hessienne).

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et si x, y est un point de $\mathcal{D}$ on note

$$\nabla^2(f)(x, y) \begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) \\ \partial_{2,1}^2(f)(x, y) & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) \end{pmatrix}$$

C'est la **matrice hessienne** de f au point (x, y) .



Corollaire 1 (Symétrie de la matrice hessienne).

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et si (x, y) est un point de $\mathcal{D}$ alors la matrice $\nabla^2(f)(x, y)$ est une matrice symétrique. Elle est donc

Proposition 15.

Développement limité à l'ordre 2 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et (x, y) un point à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Alors il existe une fonction $(x, y) \mapsto \varepsilon(x, y)$ h et k suffisamment petits,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + {}^t\nabla(f)(x, y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \nabla^2(f)(x, y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2 + k^2) + \varepsilon(h, k)$$

telle que ε soit continue en $(0, 0)$ et $\varepsilon(0, 0) = 0$

Remarque : $h^2 + k^2 = (\sqrt{h^2 + k^2})^2$ est le carré de la distance euclidienne entre les points (x, y) et $(x+h, y+k)$.

Exercice : Quelle est la taille de la matrice $\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \nabla^2(f)(x, y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. Comment peut écrire cette matrice avec une transposée?

Proposition 16 (Unicité d'un DL2).
Il n'existe qu'un seul développement limité de f en (x, y) .