EM LYON 2017 voie E

EXERCICE 1

On considère la fonction f :$]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Etudier les variations de la fonction u :$]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction g : $[2;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Ecrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.

9. (a) Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[, \qquad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n.$

   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge et calculer cette intégrale.

11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle ?

12. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge. On pourra utiliser le résultat de la question 9. (a).

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie pour tout (x,y) de $]1;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.

14. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).

    (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

EXERCICE 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.

Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$ et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.
2. (a) Montrer que la matrice de A de a dans la base $\mathcal{B}$ de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer le rang de la matrice A.
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer Ker(a) et Im(a).

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.

On note B et C les matrices, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $\quad b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

   (b) L'endmorphisme b est-il diagonalisale ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?

8. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

   (b) En déduire que l'endormophisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer que $\quad \forall P \in E, \quad f(P) = P'$.

10. En déduire : $\quad (BA - AB)^3 = 0$.

EXERCICE 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la fa con suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :
B_k l'événement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"
R_k l'événement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s=EML(n)
    b=1 // b d\'esigne le nombre de boules bleues pr\'esentes dans l'urne
    r=2 // r d\'esigne le nombre de boules rouges pr\'esentes dans l'urne
    s=0 // s d\'esigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirag
    for k=1:n
        x=rand()
        if ... then
            ...
        else
            ...
        end
    end
endfunction
```

RÉPONSE:

```
function s=EML(n)
    b=1 //désigne le nombre de bille BLEUES présentes dans l'urne
    r=2//désigne le nombre de bille ROUGES présentes dans l'urne
    s=0 //désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k=1:n
        x=rand()
        if x<=r/(r+b)  then
```

```
            r=r+1
            s=s+1
        else
            b=b+1
        end
    end
endfunction
```

*

2. On exécute le programme suivant :

```
n=10
m=0
for i=1:1000
    m=m+EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat ?

RÉPONSE:

La simulation proposée effectue un tirage de 10 billes `EML(10)`, et cette opération est répétée 1000 fois, en addtionnant à chaque fois le nombre de billes rouges obtenues `m=m+EML(10)`. Comme on affiche $m/1000$, on a calculé une moyenne empirique du nombre de billes rouges obtenue en tirant 10 billes.

*

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

RÉPONSE:

POur obtenir lpour la première fois une bille rouge au rang n, il faut que les billes tirées aux rang 1, 2,..., $n-1$ soient rouges et la bille tirée au rang n soit bleue, donc

$$[Y=n] = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap B_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} R_k\right) \cap B_n$$

En appliquant le théorème des probabilités composées [1]

$$\mathbb{P}([Y=n]) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}}(B_n)$$

$P(R_1) = 2/3$ car d'après l'énoncé il y a au départ trois billes, dont 2 rouges. Aprés le premier tirage ayant donné un bille rouges la compostition de l'urne est 3 rouges et une bleur donc

$$\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{3}{4}$$

Lors du tirage k, si les $k-1$ premiers tirages ont amené des billes rouges alors la composition de l'urne est de 2+k-1 billes rouges et de une bille bleue, et donc

$$\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{k+1}{k+2} \qquad \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{k+2}$$

$$\mathbb{P}([Y=n]) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2}$$

Ce qui donne

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

*

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

RÉPONSE:

Étudions la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(Y=n)$. On a, pour n plus grand que 1

$$n\mathbb{P}(Y=n) = \frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

1. Pourquoi ces évènements ne sont ils pas indépendant ?

et

$$\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

et la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente. Donc d'après le th'éorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la séries $\sum n\mathbb{P}(Y = n)$ est aussi une série divergente.

$\boxed{\text{La variable aléatoire } Y \text{ n'admet pas d'espérance et donc n'admet pas de variance.}}$

*

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet elle une espérance ? Une variance ?

RÉPONSE:

De même que précédemment

$$[Z = n] = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap R_n$$

Donc en utilisant le théorème des probabilités composées

$$\mathbb{P}([Z = n]) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}}(R_n)$$

Avec une raisonnement similaire on trouve :

$$\mathbb{P}([Z = n]) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{1+n-1}{3+n-2} \times \frac{2}{3+n-1}$$

Ce qui se "télescope" en

$$\mathbb{P}([Z = n]) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{n}\frac{1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

La série $\sum_{n \geqslant} n\mathbb{P}(Z = n)$ a pour terme général

$$n\mathbb{P}(Z = n) = \frac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n^2}$$

Cette série est une série de Riemann de paramètre 2, donc convergente. D'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant} n\mathbb{P}(Z = n)$ converge et donc

$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z \text{ admet une espérance.}}$

La série $\sum_{n\geqslant 1} n^2\mathbb{P}(Z=n)$ a un terme général équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{4}{n}$ et la série de Riemann, $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente, d'après le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la $\sum_{n\geqslant 1} n^2\mathbb{P}(Z=n)$ diverge, la variable aléatoire, Z, n'a pas de moment d'ordre 2, donc

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z \text{ n' admet pas de variance.}}$$

*

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

RÉPONSE:

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

*

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

La Probabilité d'obtenir une bille rouge au premier tour est $\dfrac{2}{3}$

$$\boxed{\text{La loi de } X_1 \text{ est donnée par } \mathbb{P}(X_1=1)=\frac{2}{3},\ \mathbb{P}(X_1=0)=\frac{1}{3}.}$$

L'espérance de X_1 est donc $0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, et sa variance est $(0 - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} + (1 - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.
Remarque : Nous avons utilis'é la définition pour calculer la variance, mais nous aurions aussi pu utiliser la formule de Koenig Huygens.

$$\boxed{E(X_1) = \frac{2}{9}, V(X_1) = \frac{2}{9}.}$$

*

7. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

RÉPONSE:

En utilisant la déscription de l'expérience

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3+1} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(R_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3+1} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \mathbb{P}(R_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3+1} = \frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3}\frac{3}{3+1} = \frac{1}{2}$$

Remarque : La somme de ces 4 réels est bienégale à 1.

La loi du couple (X_1, X_2) est donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{6}$

*

(b) En déduire la loi de X_2. On a $[X_2 = 1] = [X_1 = 1, X_2 = 1] \cup [X_1 = 0, X_2 = 1]$ et cette union est disjointe. donc

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

On a $[X_2 = 0] = [X_1 = 1, X_2 = 0] \cup [X_1 = 0, X_2 = 0]$ et cette union est disjointe. donc

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Remarque : La somme de ces deux réels vaut bien 1.

$$\boxed{\text{La loi de } X_2 \text{ est donnée par } \mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \text{ et } \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}.}$$

(c) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

RÉPONSE:

On remarque par exemple que $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{6}$ et que $P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}$ Ces deux réels sont différents donc :

$$\boxed{\text{Les deux variables aléatoires } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

*

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0; n]\!]$.

(a) Calculer $\mathbb{P}\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right)$.

RÉPONSE:

En utilisant le théorème des probabilités composées.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right) \\
&= \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2) \cdots \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_k}(B_{k+1})\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1}}(B_{k+2}) \cdots \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n-1}}(B_n) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \frac{2+k-1}{3+k-1} \times \frac{1}{3+k} \times \frac{2}{3+k+1} \times \cdots \frac{1+n-1-k}{3+n-1} \\
&= \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}.}$$

*

(b) Justifier : $\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \binom{n}{k}\mathbb{P}\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$

RÉPONSE:

$[S_n = k]$ est l'événement « on obtient exactement k billes rouges dans un tirage de $nbilles$ ». Dans la question précédente, nous avons calculer la probabilité que lors d'un tirage de n billes, les k premières soient rouges et les n-k suivantes sont bleues.
Or ici l'ordre d'apparition des billes rouges n'a pas d'importance du moment qu'il y a k billes rouges.
Il y a $\binom{n}{k}$ fa cons de choisir le rang de sortie des k billes rouges parmi les n tirages, puis la probabilité d'obtenir le tirage avec les k billes rouges exactement à ces rangs là est égale à la probabilité précédente, donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \binom{n}{k}\mathbb{P}\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right),.}$$

En utilisant le résultat précédent

$$\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \binom{n}{k}\mathbb{P}\left(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left([S_n = k]\right) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}}$$

Remarque : Cette remarque ne doit pas figurer dans votre réponse !Dans la première partie de cette réponse, il suffit effectivement d'écrire « l'ordre n'a pas d'importance »pour satisfaire les correcteurs. Mais cela peut sembler non naturel, en effet on retire les billes les unes après les autres, la composition de l'urne est modifiée à chaque fois, de façon différentes ! Pour ce convaincre que l'ordre n'a pas d'importance essayons de raisonner de façon plus générale. Si on veut calculer la pobabilité d'obtenir k billes rouges sur un tirage de n billes, **avec des rangs d'apparitions fixé s** , on va obtenir un produit du type

$$\mathbb{P}(\qquad) = \frac{?}{3}\frac{?}{3+1}\cdots\frac{?}{3+n-1}$$

Le dénominateur des probabilités évolue de la même façnc car les nombre total de billes augmente toujours de 1 à chaque tirage.
Parmi ces n tirages k sont des rouges, donc parmi les numérateurs, nous allons voir apparaitre 2, puis 3, puis k jusqu'à $2+k-1$, dans cette ordre mais avec éventuellement des "sauts". Pour les numérateurs correspondant aux tirages bleues, on va voir apparaitre $1, 2, \ldots 1+n-k-1$.
Le calcul de cette probabilité fait donc apparaitre le même produit au numérateur mais dans un ordre différent.

*

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

<u>RÉPONSE:</u>

S_n est une variable aléatoire qui prend un nombre fini de valeurs donc elle admet une espérance.

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1))}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{2}{n+2}\left(\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{n}{2}\right) \\
&= \frac{2}{n+2}\frac{2n^2+4n)}{6} \\
&= \frac{1}{n+2}\frac{2n(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n \text{ admet une espérance et } E(S_n) = \frac{2n}{3}}$$

*

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer : $\forall k \in [\![0;n]\!], \quad \mathbb{P}_{[S_n=k]}\left([X_{n+1}=1]\right) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

RÉPONSE:

Soient n un entier strictement positif et k un entier naturel plus petit que n.
Supposons que l'évènement $[S_n = k]$ est réalisé, alors dans les n premiers tirages, nous avons obtenu k fois une bille rouge, donc rajouté k billes rouges. Nous avons donc obtenu $n-k$ fois des billes bleues, donc rajouté $n-k$ billes bleurs.
La composition de l'urne est donc $2+k$ billes rouges et $n-k+1$ billes bleues. La probabilités, sous cette hypothèse de tirer une bille rouge est donc

$$\frac{2+k}{2+k+n-k+1}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0;n]\!], \text{ nous avons } \mathbb{P}_{[S_n=k]}\left([X_{n+1}=1]\right) = \frac{k+2}{n+3}}$$

*

(b) En déduire : $\quad \mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right) = \dfrac{E(S_n)+2}{n+3}$.

RÉPONSE:

On va utiliser le théorème des *probabiltés totales* avec le système complet d'événements $[S_n = 0]$, $[S_n = 1]$,...$[S_n = n]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[S_n=k]\mathbb{P}_{[S_n=k]}\left([X_{n+1}=1]\right) && \text{I} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[S_n=k]\frac{k+2}{n+3} && \text{question précédente, il ne faut pas encore utili} \\
&= \frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}[S_n=k] + \frac{2}{n+3}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[S_n=k] \\
&= \frac{1}{n+3}E(S_n) + \frac{2}{n+3}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[S_n=k] && \text{définit} \\
&= \frac{1}{n+3}E(S_n) + \frac{2}{n+3}\times 1 && \text{système com}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right)=\frac{E(S_n)+2}{n+3}}$$

*

(c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

RÉPONSE:

On peut maintenant utiliser la question 8b.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right)&=\frac{E(S_n)+2}{n+3}\\&=\frac{\frac{2n}{3}+2}{n+3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{P}\left([X_{n+1}=0]\right)=1-\mathbb{P}\left([X_{n+1}=1]\right)=\frac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{La loi de la variable aléatoire } X_{n+1} \text{ est une loi de Bernouilli de paramètre } \frac{2}{3}}$$

Remarque : Ce résultat est indépendant de n, c'est à dire qu'à chaque étape nous avons la même chance de tirer une bille rouge. Cette loi est la même que celle de X_0.

*

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad T_n=\frac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \forall x<0, \quad \mathbb{P}\left([T_n\leqslant x]\right)=0, \quad$ et : $\quad \forall x>1, \quad \mathbb{P}\left([T_n\leqslant x]\right)=1$.

RÉPONSE:

Lors des n tirages on a tiré au total n billes. S_n est le nombre de billes rouges tirées, cet entier est compris entre 0 et n

$$0 \leqslant S_n \leqslant n$$

Donc

$$0 \leqslant T_n \leqslant 1$$

Remarque : L'énoncé indique que T_n est une **une proportion**, donc compris entre 0 et 1. Ceci démontre que pour $x < 0$ l'évènement $([T_n \leqslant x]$ est impossible, et que pour $x > 1$ l'évènement $([T_n \leqslant x]$ est certain.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \quad \forall x < 0, \quad \mathbb{P}\left([T_n \leqslant x]\right) = 0, \quad \text{et :} \quad \forall x > 1, \quad \mathbb{P}\left([T_n \leqslant x]\right) = 1.}$$

*

12. Soit $x \in [0;1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \mathbb{P}\left([T_n \leqslant x]\right) = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)\,(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$
    où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

<u>RÉPONSE:</u>

$$[T_n \leqslant x] = \left[\frac{S_n}{n} \leqslant x\right] = [S_n \leqslant nx] = [S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que S_n ne prend que des valeurs entières.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n < x) &= \mathbb{P}(S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} && \text{en utilisant la question 8b} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} k+1 \right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} i \right) && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 1 + 1)}{2} \right) && \text{formule somme des entiers} \\
&= \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ et pour } x \in]0;\, 1[,\ \mathbb{P}(T_n < x) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.}$$

*

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

RÉPONSE:

On rappelle que pour tout réel α

$$\alpha - 1 < \lfloor \alpha \rfloor \leqslant \alpha$$

x est une constante dans les calculs quisuivent, n est la variable qui tend vers $+\infty$

Soit $x \in]0;\, 1[$, et $n \in \mathbb{N}^*$

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

donc

$$nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \leqslant nx + 1$$

et

$$nx+1 < \lfloor nx \rfloor + 2 \leqslant nx+1$$

donc

$$\frac{(nx)(nx+1)}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{(nx+1)(nx+2)}{(n+1)(n+2)}$$

comme x est strictement positif

$$nx+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} nx \qquad nx+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$$

$$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \qquad n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim}$$

donc

$$\frac{(nx+1)(nx+2)}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(nx+1)(nx+2)}{(n+1)(n+2)} = x^2$$

De la même façon

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(nx)(nx+1)}{(n+1)(n+2)} = x^2$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} = x^2$$

Donc

$$\forall x \in]0;\, 1[\qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n < x) = x^2$$

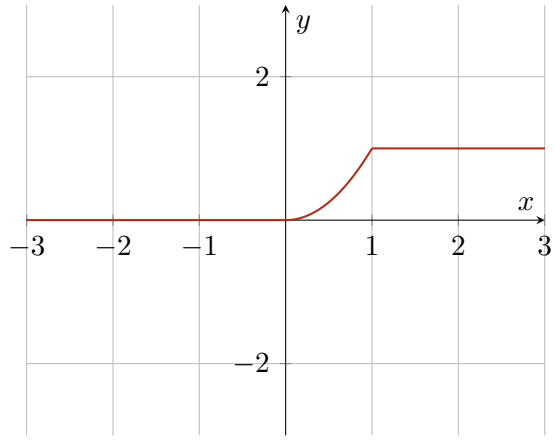
Pour $x \leqslant 0$, d'après la question **??**, $\mathbb{P}(T_n < x) = 0$ donc

$$\forall x < 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n < x) = 0$$

Pour $x \geqslant 1$, d'après la question **??**, $\mathbb{P}(T_n < x) = 1$ donc

$$\forall x > 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n < x) = 1$$

Donc la suite de variables aléatoires T_n tend vers une variable aléatoire dont la fonction de répartition est


y
2
x
−3
−2
−1
1
2
3
−2

*