# Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice $B$ et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ I'cnsemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $g_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On considère une matrice $A$ fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I'application $f$, qui à toute matrice $M$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = \left({}^tA\right) M + MA$$

2. (a) Soit $M$ une matrice de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

   (b) En déduire que $f$ est un endomorphisme de II, $(\mathbb{R})$

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$

   (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

4. (a) Calculer $f(J), f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de $J$ et $L$ seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$

   (c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5. (a) Écrire la matrice $F$ de $f$ dans la base $B$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$

   (b) En déduire les valeurs propres de $f$

   (c) On note $Id$ l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Determiner le rang de $f + Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

# Exercice 2

On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma$ est strictement positif. On rappelle que la fonction $f_X$ qui à tout réel $x$ associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de $X$ et on note $F_x$ la fonction de répartition de $X$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_x(-x) = 1 - F_x(x)$

2. On pose $Y = |X|$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire.

   (a) Montrer que la fonction de répartition de $Y$ est la fonction, notée $F_r$, définie par :

$$F_r(x) = \begin{cases} 2F_x(x) - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

   (b) En déduire que $Y$ est une variable à densité et donner une densité $f_Y$ de $Y$.

(c) Montrer que $Y$ possède une esperance et que l'on a $E(Y)=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3. On suppose, dans cette question seulement, que $\sigma$ est inconnu et on se propose de l'estimer. Soit $n$ un entier naturel supéricur ou cgal à 1. On considère un échantillon $\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que $Y$

   On note $S_n$ la variable aléatoire définie par $S_n=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$

   (a) Montrer que $S_n$ est un estimateur de $\sigma$, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de $\sigma$, que l'on notera $T_n$, construit de façon affine à partir de $S_n$.

   (b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de $X$, puis déterminer $E\left(Y^2\right), V(Y)$ et $V\left(S_n\right)$

   (c) Déterminer le risque quadratique de $T_n$ en tant qu'estimateur de $\sigma$. En déduire que $T_n$ est un estimateur convergent de $\sigma$

4. On rappelle qu'en Scilab, si $i$ et $j$ désignent deux entiers naturels non nuls, la commande grand $(i, j$, 'nor $', m, s)$ simule dans un tableau a $i$ lignes et $j$ colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance $m$ et de variance $s^2$ Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires $S_n$ et $T_n$ pour des valeurs de $n$ et $\sigma$ entrées par l'utilisateur.

```
n = input ( 'entrez la valeur de n :')
sigma = input ( 'entrez la valeur de sigma :')
X = ------- // simulations de X1,...,Xn
Y = ------- // simulations de Y1,...,Yn
S = -------
T = -------
```

# Exercice 3

Soit $n$ un entier naturel non nul et $p$ un réel de $]0;1[$. On pose $q=1-p$

On dispose de deux urnes, l'urne $U$ qui contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et l'urne $V$ qui contient des boules blanches en proportion $p$.

On pioche une boule au hasard dans $U$ et on note $X$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si $X$ prend la valeur $k$, on pioche $k$ boules dans $V$, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n=1$, reconnaître la loi de $Y$ On revient au cas général.
2. Reconnaître la loi de $X$ et donner son espérance et sa variance.
3. Soit $k$ un élément de $[1, n]$. Reconnaître la loi de $Y$, conditionnellement à l'événement $(X=k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k<i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y=i)$
4. On rappelle les commandes Scilab suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

   grand $(1,1$, 'uin', $a, b)$ simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$
   grand $(1,1,'\mathrm{bin}', \mathrm{n}, \mathrm{p})$ simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n, p$
   grand $(1,1$, 'geom $', \mathrm{p})$ simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$
   grand $(1,1$, 'poí, a) simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a$.
   Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables $X$ et $Y$.

```
n=input ('entrez la valeur de n :')
p=input ('entrez la valeur de p : ')
X = ---------------
Y = ---------------
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par $Y$ est égal à $[0, n]$, puis montrer que :

$$P(Y=0)=\frac{q\,(1-q^n)}{n(1-q)}$$

   (b) Écrire, pour tout $i$ de $[1, n]$, la probabilité $P(Y=i)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit $i$ et $k$ deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$

   (b) Établir ensuite que $Y$ possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}p^i q^{k-i}\right)$$

   (c) En déduire que $E(Y)=\frac{(n+1)p}{2}$

7. (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1))=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\begin{pmatrix} k-2 \\ i-2 \end{pmatrix}p^i q^{k-i}\right)$$

   (b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1))=\frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$

   (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de $Y$ en fonction de E(Y(Y-1)) et E(Y)

# Problème

On convient que, pour tout réel $x$, on a $x^0=1$

1. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \text{ et } J_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

2. Calculer $I_0$ et $I_1$

3. (a) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n$

   (b) En déduire $I_2$

   (c) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de $I_n$ (dans la variable b) et son affichage pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
n=input ('donnez une valeur pour n: ')
a=1/2
b= log(2) - 1/2
for k=2: n
   aux = a
   a=-----\\
   b=------\\
end\\
disp (b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
   (b) En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n.I_{n-1} - \frac{1}{2}$
6. (a) Calculer $J_0$ puis exprimer, pour tout entier naturel $n$, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de $n$
   (b) En déduire la valeur de $J_1$
7. En utilisant les questions 5 ) et 6 ), compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de $I_n$ pour une valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
 n=input ('donnez une valeur pour n: ')
 J=\log (2)
 for k=1: n-1
     J=------
 end
I=-----
disp(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$
9. (a) Utiliser les questions 4 ) et 5 ) pour déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$
   (c) Utiliser la question 5 ) pour déterminer un équivalent de $J_n$, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$
10. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$
    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$
    (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général $u_n$?
11. On se propose, malgré 1'impasse précédente, de montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite $(x_n)$ est telle que les suites $(x_{2n})$ et $(x_{2n+1})$ sont convergentes et de même limite $\ell$, alors la suite $(x_n)$ converge vers $\ell$ Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$
    (a) Justifier que, pour tout entier naturel $k$ non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$
    (b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

    (c) Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.
12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.
    a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$
    b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$
    c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$