Extrema des fonctions de deux variables.

ECE 2 Lycée international de Valbonne

2 février 2021

Table des matières

I Rappels de première année sur les fonctions d'une variable

Dans cette partie les fonctions sont des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition 1 (Majorant, minorant, bornes)**.**
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

- *On dit que f est **majorée** sur $\mathcal{D}$ si il existe un réel M tel que pour tout x de $\mathcal{D}$, .*
  *M est alors **UN majorant** de f sur $\mathcal{D}$.*
- *On dit que f est **minorée** sur $\mathcal{D}$ si il existe un réel m tel que pour tout x de $\mathcal{D}$, .*
  *m est alors **UN minorant** de f sur $\mathcal{D}$.*
- *On dit f est **bornée** sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est minorée **et** majorée. Le minimum et le maximum de f sont des **bornes** de f.*

Définition 2 (Extrema gobal)**.**
Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.

- *On dit que f admet un **maximum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit alors que le réel $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son maximum** en x_0.*
  On le note
  $$\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) \qquad \max_{\mathcal{D}} f$$

- *On dit que f admet un **minimum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit alors que le réel $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son minimum** en x_0. On le note*

$$\min_{x\in\mathcal{D}} f(x) \qquad \min_{\mathcal{D}} f$$

- *On appelle **extremum** de f sur $\mathcal{D}$ un minimum ou un maximum de f sur $\mathcal{D}$.*

Définition 3 (Extrema local)**.**
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.

- *On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si et seulement si il existe un $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha;\ x_0 + \alpha[$ atteint un minimum en x_0.*
- *On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si et seulement si il existe un $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha;\ x_0 + \alpha[$ atteint un maximum x_0.*

Définition 4 (Segment)**.**
Un ***segment*** *est un intervalle fermé borné, c'est à dire la forme* $[a;\ b]$.

Dans toute la suite si on écrit $[a;\ b]$ on supposera que $a < b$.

Théorème 1 (Fonction continue sur un segment)**.**
Soit f *une fonction* ***continue*** *sur le segment* $[a;\ b]$ *alors l'image de* $[a;\ b]$ *par* f*,(que l'on note)* $f([a;\ b])$ *est* .

Corollaire 1 (Maximum/minimum d'une fonction continue sur un segment)**.**
Soit f *une fonction définie et* ***continue*** *sur le segment* $[a;\ b]$*. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes sur* $[a;\ b]$*. C'est à dire que* f *atteint un minimum et un maximum sur* $[a;\ b]$.

Proposition 1 (Condition nécessaire)**.**
Soit f *une fonction dérivable sur un intervalle* ***ouvert****. Si* f *admet un extrema local en* $x_0 \in I$ *alors* .

Proposition 2 (Extremum local d'une fonction dérivable.)**.**
Soit une fonction f*, dérivable sur un intervalle* ***ouvert*** I*. Si sa dérivée*
alors f *admet un extremum local en ce point.*

II "Topologie" de $\mathbb{R}^2$

Définition 5 (Boules de $\mathbb{R}^2$)**.**
Soit $M_0 = (x_0,\ y_0) \in \mathcal{D}$ et $r > 0$.

Une boule de centre $(x_0,\ y_0)$ et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance au point $(x_0,\ y_0)$ est strictement inférieur à r.

$$\mathcal{B}(M_0, r) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 / \qquad\qquad\qquad \right\}$$

Définition 6 (Ensembles bornés)**.**
On dit que $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ est une partie ***bornée*** *si et seulement si elle est incluse dans une boule.*

Définition 7 (Fermés et ouverts : intuition)**.**
*On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est **ouverte** si et seulement si elle n'a pas de bord. On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est **fermée** si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

Définition 8 (Fermés et ouverts :formalisation)**.**
*On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ est **un ouvert** si et seulement si en tout point de $\mathcal{O}$ il existe une boule incluse dans $\mathcal{O}$. On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est **un fermé** si et seulement si son complémentaire est ouvert*

Attention : Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés.

Définition 9 (Extrema gobal)**.**
Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

- *On dit que f admet un **maximum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $(x_0,\ y_0) \in \mathcal{D}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a . On dit alors que le réel $f(x_0,\ y_0)$ est le maximum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son maximum** en $(x_0,\ y_0)$. On le note*
$$\max_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x, y) \qquad \max_{\mathcal{D}} f$$
- *On dit que f admet un **minimum** sur $\mathcal{D}$ lorsqu'il existe $(x_0,\ y_0) \in \mathcal{D}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a . On dit alors que le réel $f(x_0,\ y_0)$ est le minimum de f sur $\mathcal{D}$ et que f **atteint son minimum** en $(x_0,\ y_0)$. On le note*
$$\min_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x) \qquad \min_{\mathcal{D}} f$$
- *On appelle **extremum** de f sur $\mathcal{D}$ un minimum ou un maximum de f sur $\mathcal{D}$.*

Définition 10 (Extrema local)**.**
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $x_0 \in \mathcal{D}$.

- *On dit que f admet un* ***minimum local*** *en $(x_0,\ y_0)$ si et seulement si il existe une boule $\mathcal{B}$ centrée en $(x_0,\ y_0)$ telle que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ atteint un minimum en $(x_0,\ y_0)$.*
- *On dit que f admet un* ***maximum local*** *en x_0 si et seulement si il existe une boule $\mathcal{B}$ centrée en $(x_0,\ y_0)$ telle que la restriction de f à $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ atteint un maximum $(x_0,\ y_0)$.*

Remarque : Si f admet un minimum global en $(x_0,\ y_0)$ alors c'est aussi un minimum global, mais la réciproque est fausse.

III Extrema d'une fonction de deux variables

Théorème 2 (fonction continue sur un fermé borné)**.**
Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ On suppose que $\mathcal{U}$ est fermé et borné et que f est ***continue****.*
Alors f atteint un maximum et un minimum global sur $\mathcal{U}$.

III.1 Point critique

Théorème 3 (Condition nécessaire)**.**
Si une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ***ouvert*** *$\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors*

$$\nabla f(x_0,\ y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Définition 11 (Point critique)**.**

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$ ***point critique*** *est un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$ tel que $\nabla f(x_0,\ y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

III.2 Conditions suffisantes pour l'existence d'un extremum.

Théorème 4 (Utilisation de la matrice Hessienne)**.**
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$. Si $(x_0,\ y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres

de la matrice hessienne de f au point $(x_0,\ y_0)$ sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en $(x_0,\ y_0)$.

Exercice 1.
Trouver les extrema locaux de $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$ sur $\mathbb{R}^2$

Définition 12 (Point selle)**.**
Si $(x_0,\ y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point $(x_0,\ y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en $(x_0,\ y_0)$ et $(x_0,\ y_0)$ est un point col pour f.

Exercice 2.
Étudier les points critiques de $f(x,y) = xy(x+y-1)$ sur $\mathbb{R}^2$.