MÉTHODE DE MONTE-CARLO

Le but de ce TP est de présenter la méthode de Monté-Carlo. Cette méthode consiste à remplacer de calculer certaines valeur en utilisant des méthodes probabilistes.

I Un calcul de π.

On cherche à calculer une valeur approchée de π.

I.1 Mise en place

Question :

1. Quelle est la formule donnant l'air d'un cercle en fonction du rayon r.
2. Sur une feuille dessiner un disque $\mathcal{D}$ centré en O et de rayon 1. Tracer sur le même schéma, le carré $\mathcal{C} = [-1;\ 1] \times [-1;\ 1]$.
3. On choisit un point au hasar dans le carré quelle est la probabilité que ce point soit dans le disque.

I.2 Programme

On décide donc d'estimer la valeur de π en choisissant uniformément des points au hasard dans le carré et en comptant combien d'entre eux sont dans le disque

Question : Écrire une fonction `function b=EstDansDisque(x,y)` pour qui teste si un point de coordonnées (x, y) est dans le disque $\mathcal{D}$. Plus précisément cette fonction doit renvoyer 1 si le point $M(x, y)$ est dans le disque de centre 0 et de rayon

Question : Comment en utilisant deux fois `grand` peut on simuler le choix d'un point dans le carré $\mathcal{C}$?
Question : Compléter le programme suivant

```
N=1000000 //nombre  d'expériences
nb=  // nombre de points à l'intérieur du disque
for i=____________________
        x=grand(_____________)
        y=grand(_____________)
        nb=__________________
end

frequence=__________________
disp(_______*frequence)
```

II Un calcul d'intégrale

On veut calculer une valeur approchée de $I = \int_1^4 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Question : Montrer que

$$I = 3\int_0^1 \ln(1+3u)\,\mathrm{d}u$$

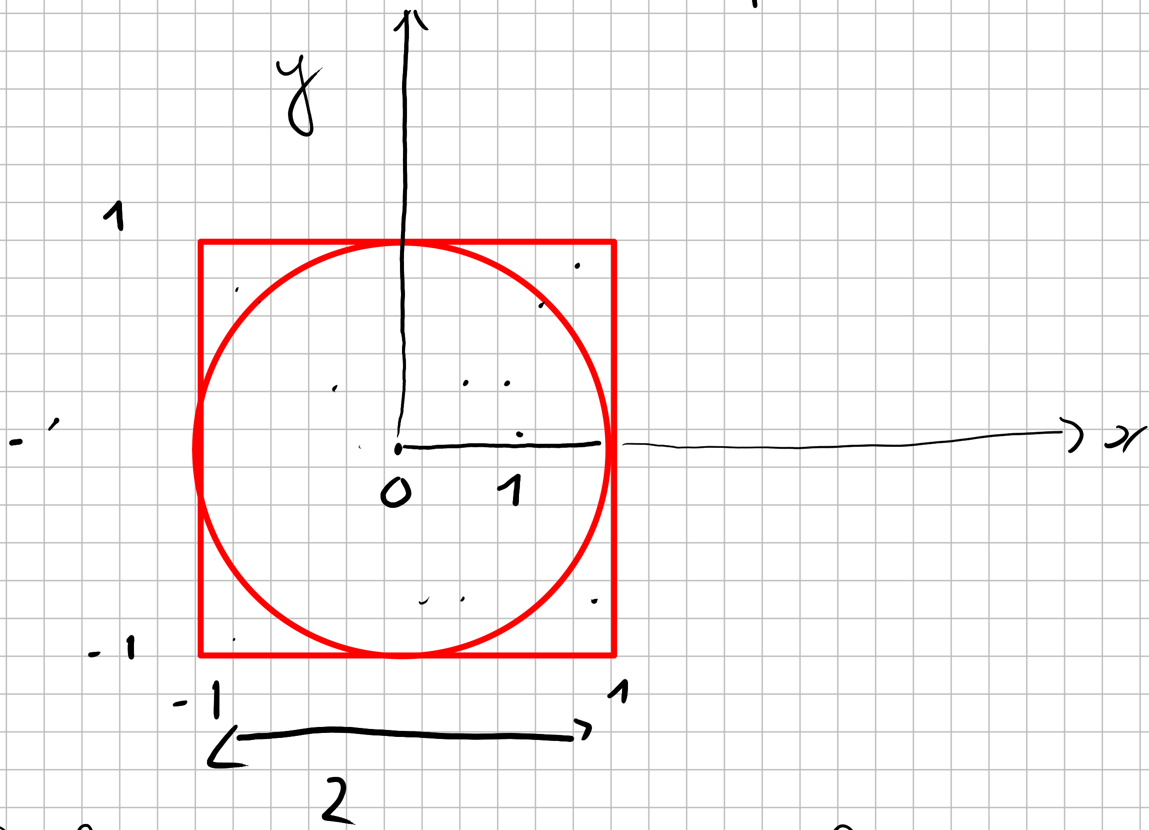
On pose maintenant

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0;\ 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+3u) \end{array} \qquad X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;\ 1[)$$

Question : Quel théorème permet de justifier que $\int_0^1 \ln(1+3u)\,\mathrm{d}u = E(\varphi(X))$? Les hypothèses de ce théorème sont elles vérifiées ?
Question : Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de $E(f(X))$.
Question : En calculant l'intégrale I vérifiez le résultat.

1) πr^2 : aire du disque de rayon r

2)

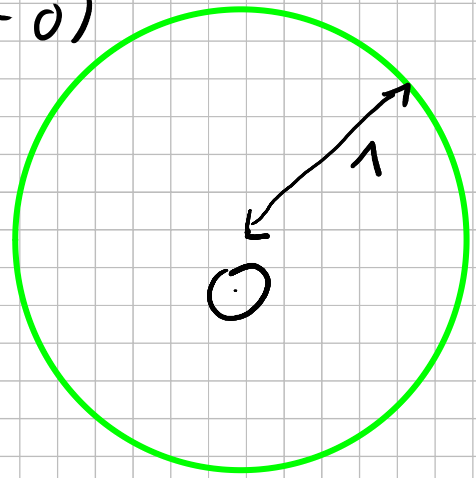


3) probabilité d'être dans le disque

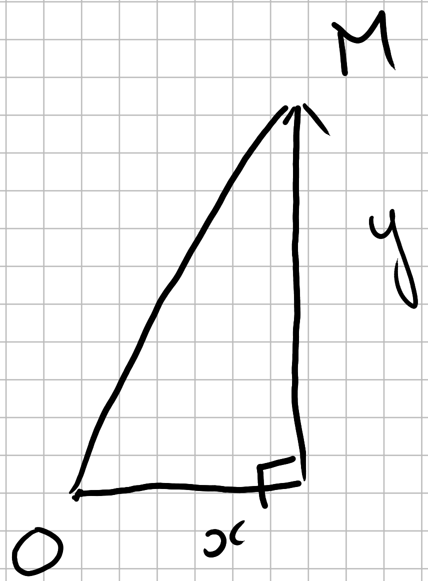
$$= \frac{\text{aire disque}}{\text{aire totale}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$

M est le point (x, y)

$$OM = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$



disque l'ensemble des points M tels la distance OM est plus petite que 1



$$OM^2 = x^2 + y^2$$

```
function y = est dans le disque (x, y)
        d = sqrt(x ^ 2 + y ^ 2)
        if d <= 1 then
                y = 1
        else
                y = 0
        end
end function
```

x = grand(1, 1, 'unf', -1, 1)

y = grand(1, 1, 'unf', -1, 1)

un

uniforme

sur les

entiers

```
N=1000000 //nombre  d'expériences
nb= 0// nombre de points à l'intérieur du disque
for i= 1 : N
        x=grand(1,1,'unf', -1, 1)
        y=grand(1,1,'unf',-1,1)
        nb= nb + estdanslEdisque(x,y)
end

frequence= nb/N
disp(  4  *frequence)
```

9)

$$\int_1^4 \ln(t)\, dt = 3\int_0^1 \ln(1+3u)\, du$$

On pose $t = 1+3u$ $\quad u = \frac{t-1}{3}$

$t=1 \rightarrow u=0$

$t=4 \quad u=1$

$\frac{dt}{du} = 3 \qquad dt = 3\, du$

$$\int_1^4 \ln(t)\,dt = \int_0^1 \ln(1+3u) \quad 3\,du$$

$$= 3 \int_0^1 \ln(1+3u)\,du$$

Q) $f : x \longmapsto \ln(1+3x)$ $\underline{\underline{C^0}}$ sur $[0,1]$

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ $\quad \varphi : (x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \varphi(x)\,dx$$

$$E(g(x)) = \int_0^1 \ln(1+3x)\, dx$$

a)

```
N = 10 000
s = 0
for i = 1 : N
    x = rand()
    s = s + log(1+3*x)
end
moy = s/N
disp(3*moy)
```

résultat

2,5003

(a) $$\int_1^4 \ln(t)\,dt = \int_1^4 1\ln(t)\,dt$$

On pose pour $t \in [1,4]$

$$u(t) = \ln(t) \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

u, v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,4]$

IPP $$\int_1^4 \ln(t)\,dt = \Big[t\ln(t)\Big]_1^4 - \int_1^4 1\,dt$$

$$= 4\ln(4) - 1\ln(1) - [t]_1^4$$

$$= 4\ln(4) - 3$$

$$= 4 \times \ln(2^2) - 3$$

$$= 8\ln(2) - 3$$

$$\simeq 2{,}54$$