Couples de variables aléatoires discrètes

ECE 2 Lycée international de Valbonne

3 septembre 2021

Table des matières

I Exemples et Définitions

I.1 Exemples

Exemple : On lance deux pièces non truquées et de couleur distincte, on note X_1 le résultat de la première pièce et X_2 le résultat de la deuxième pièce. On peut étudier le couple de variables aléatoires (X_1, X_2).

Exemple : On lance deux dés de couleur différente. On note X_1 le résultat du premier dé, X_2 celui du deuxième dé. (X_1, X_2) forment un couple de variable aléatoires.

Exemple : Dans une urne se trouve trois billes numérotées de 1 à 3. On effectue trois tirages successifs et avec remise. On note m le minimum des trois tirages et M le maximum des trois tirages. (m, M) forment un couple de variable aléatoires.

I.2 Loi du couple

Définition 1 (Loi de probabilité)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La loi *du couple (X, Y) est la donnée des réels $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout couple $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$*

Remarque : On dit aussi *loi conjointe du couple*, ou tout simplement loi de (X, Y).

Exemple : Dans le premier exemple $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ en supposans que X_1 vaut 1 dans le cas d'un pile et 0 sinon. La loi du couple est la donnée des quatre réels suivants :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$

Exemple : Dans le deuxième exemple $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![1,\ 6]\!]$ et la loi de probabilité du couple est donnée par

$$\forall i \in [\![1,\ 6]\!] \quad \forall j \in [\![1,\ 6]\!] \qquad \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{36}$$

Exemple : Dans le troisième exemple on a $m(\Omega) = M(\Omega) = \{1,\ 2,\ 3\}$ et nous devons calculer, une à une (pour le moment) toutes les probabilitées suivantes :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([m=1]\cap[M=1]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathbb{P}([m=2]\cap[M=2]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathbb{P}([m=3]\cap[M=3]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathbb{P}([m=1]\cap[M=2]) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathbb{P}([m=2]\cap[M=1]) &= 0\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

Question : Combien y-a-t'il de calculs à faire ? Justifier les réponses.

I.3 Notations

À la place de $\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$ on peut noter $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ ou $\mathbb{P}([X=x],[Y=y])$.

II Lois conditionnelles et lois marginales

II.1 Lois marginales

Dans les exemples précédents, nous connaissions les lois de X et Y et nous en déduisions la loi du couple. Soit un couple (X,Y) de variables aléatoires tel que

$$X(\Omega) = \{1,2\} \qquad Y(\Omega) = \{1,2,3\}$$

dont la loi est donnée par

$$\forall x \in \{1,2\} \quad \forall y \in \{1,2,3\} \qquad \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) = \frac{1}{6}$$

On peut alors calculer, à l'aide du théorèmes des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X=1) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=y]) = \frac{3}{6}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=y]) = \frac{3}{6}$$

Question : Préciser dans chaque cas le système complet d'événements. On a donc calculé la loi de X. On peut faire la même chose avec Y.

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{x=1}^{2} \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=1]) = \frac{2}{6}$$

Nous pouvons ensuite représenter ces résultats sous forme d'un tableau.

X/Y	1	2	3	loi de X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
2	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
loi de Y	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

(exemple1)

On voit apparaître en marge du tableau les lois de X et de Y, que l'on a pu reconstituer à partir de la loi du couple.

Proposition 1 (Lois marginales)**.**
Soit (X,Y) un couple de variable aléatoires discrètes Alors la loi (marginale) *de X est donné par le théorème des probabilités totales.*

$$\forall \square \in X(\Omega) \qquad \mathbb{P}(X=\square) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=\square] \cap [Y=y])$$

et

$$\forall \nabla \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}(Y=\nabla) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=\nabla])$$

Attention : Dans le cas ou les variables aléatoires ne sont pas finies, les sommes est une série à termes positifs qui converge.

Attention : Ceci n'est pas un nouveau théorème c'est la reformulation du théorème des probabilités totales. C'est donc ce dernier théorème qu'il faut citer à l'écrit, en indiquant le système complet d'évènement utilisé.
Exercice : Après avoir vérifier que le tableau suivant décrit bien une loi conjointe, trouver les lois marginales de X et Y.

X/Y	1	2	3	loi de X
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	
2	$1/12$	$0/$	$1/18$	
3	$1/12$	$1/6$	$2/18$	
loi de Y				1

(exemple2)

II.2 Lois conditionnelles

Définition 2 (Lois conditionnelles)**.**
Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *et soit* $y\in Y(\Omega)$ *telle que* $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$. *On définit* la loi conditionnelle de X sachant $Y=y$ *par*

$$\forall \square\in X(\Omega)\qquad \mathbb{P}_{(Y=y)}(X=\square)=\frac{\mathbb{P}([Y=y]\cap[X=\square])}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

C'est bien un loi de probabilité !
Exemple : En reprenant le tableau exemple1. On calcule les trois lois conditionnelles pour X.

$$\text{sachant } Y=1\qquad \mathbb{P}_{Y=1}(X=1)=\frac{1/6}{1/3}=\mathbb{P}_{Y=1}(X=2)$$

$$\text{sachant } Y=2\qquad \mathbb{P}_{Y=2}(X=1)=\frac{1/6}{1/3}=\mathbb{P}_{Y=2}(X=2)$$

$$\text{sachant } Y=3\qquad \mathbb{P}_{Y=3}(X=1)=\frac{1/6}{1/3}=\mathbb{P}_{Y=3}(X=2)$$

On peut bien sur définir les lois conditionnelles de Y de la même façon, il y en a deux.

$$\text{sachant } X=1\qquad \mathbb{P}_{X=1}(Y=1)=\frac{1/6}{1/2}=\mathbb{P}_{X=1}(Y=2)=\mathbb{P}_{X=1}(Y=3)$$

$$\text{sachant } X=2\qquad \mathbb{P}_{X=2}(Y=1)=\frac{1/6}{1/2}=\mathbb{P}_{X=2}(Y=2)=\mathbb{P}_{X=2}(Y=3)$$

Exercice : Faire le même travail sur exemple2.

Proposition 2 (Probabiltés totales : De la loi conditionnelle à la loi marginale)**.**
Soit (X,Y) *un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ *et telles que pour tout* $y\in Y(\Omega)$ *on a* $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$.
Alors pour $\square\in X(\Omega)$ *:*

$$P(X=\square)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(Y=y)\mathbb{P}_{(Y=y)}(X=\square)$$

⚠ **Attention :** Ceci n'est pas un nouveau théorème c'est la reformulation du théorème des probabilités totales. C'est donc ce dernier théorème qu'il faut citer à l'écrit, en indiquant éventuellement le système complet d'évènement utilisé.

II.3 Exemple classique : rang d'apparition du second succès.

On lance un dé une infinité de fois. On note X le rang d'apparition du premier 6 et Y le rang d'apparition du second 6.

On note $r = 1/6$ et $q = 1 - r$. S_k est l'événement « on obtient 6 au tirage k » et $E_k = \overline{S_k}$

On sait que X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(r)$.

On voit aussi que $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

II.3.a Loi du couple

Il nous faut déterminer

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

Cas élémentaire

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad j \leqslant i \Rightarrow \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$$

car le deuxième succès ne peut pas arriver avant le premier.

Cas général

Pour $i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $j > i$

$$[X = i] \cap [y = j] = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1} \cap S_i \cap E_{i+1} \cap \cdots \cap E_{j-1} \cap S_j$$

Les lancers étant indépendants

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = i] \cap [y = j]) &= \underbrace{\mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) \times \cdot \times \mathbb{P}(E_{i-1})}_{i-1 \text{ termes}} \times \mathbb{P}(S_i) \times \underbrace{\mathbb{P}(E_{i+1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_{j-1})}_{j-1-(i+1)+1 \text{ termes}} \times \mathbb{P}(S_j) \\ &= q^{i-1} r q^{j-i-1} r \\ &= q^{j-2} r^2\end{aligned}$$

Remarque : on a bien j termes dans ce produit qui correspondent bien aux j lancers effectués pour obtenir le deuxième succès.

Dans les cas suivants la décomposition de notre événement n'est pas valide.

Cas à traiter à part : le deuxième succès suit immédiatement le premier succès

On suppose que $j = i + 1$ avec $i > 1$.

$$[X = i] \cap [Y = i + 1] = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{i-1} \cap S_i \cap S_{i+1}$$

On trouve alors

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i + 1]) = q^{i-1} r^2$$

ce qui est aussi égal à

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i + 1]) = q^{j-2} r^2$$

Cas à traiter à part : le premier lancer est un succès mais pas le deuxième.

On suppose que $j > 2$ et $i = 1$

$$[X = 1] \cap [Y = j] = S_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{j-1} \cap S_j$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = r \times \underbrace{q \times \cdots \times q}_{j-1-2+1 \text{ termes}} \times r =$$

On trouve donc aussi :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = q^{j-2} r^2$$

Cas à traiter à part : les premier et deuxième lancers sont des succès :
On suppose $i = 1$ et $j = 2$

$$[X = 1] \cap [Y = 2] = S_1 \cap S_2$$

et donc :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 2]) = r^2 = q^{j-2} r^2$$

Conclusion

Pour $j \leqslant i$ alors $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$ et si $j > i$ on a $\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = j]) = q^{j-2} r^2$

II.3.b Loi marginale de Y

Soit $j \leqslant 2$. On applique le théorème des probabilités totales avec le système complet d'événements $[X = 1]$, $[X = 2]$,...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) && \text{d'après le cas élémentaire} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} q^{j-2} r^2 && \text{loi du couple } (X, Y) \\
&= q^{j-2} r^2 \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\
&= (j-1) q^{j-2} r^2
\end{aligned}$$

La loi marginale de Y est donnée par : $\mathbb{P}(Y = j) = (j-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{j-2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$ si $j \geqslant 2$

II.3.c Loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$

Soit $i \geqslant 1$ et $j > i$ deux entiers

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X=i)}(Y=j) &= \frac{\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])}{\mathbb{P}_{(X=i)}} \\ &= \frac{q^{j-2}r^2}{q^{i-1}r} \\ & q^{j-1}r\end{aligned}$$

Ce que l'on peut choisir d'écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}* \qquad \mathbb{P}_{(X=i)}(Y=i+k) = q^{k-1}r$$

Quelle loi retrouve t'on ? Est ce normal ?
Exercice : Calculer l'espérance de Y si elle existe.

II.4 Une urne variable

On choisit un entier naturel selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si cet entier est k on rempli l'urne avec k boules rouges et une boule noire. On mélange les boules l'urne et on tire une bille. On gagne si la bille est noire. Calculer la probabilité de gagner.

II.4.a Formalisation

Il faut comprendre ici que l'on nous donne, indirectement, des *probabilités conditionnelles*.

Notons X la variable aléatoire liée au nombre entier choisi avec la loi de Poisson. Notons Y la variable aléatoire lié au succès. $Y=1$ si la bille tirée est noire $Y=0$ sinon.

D'après l'énoncé

$$\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=1) = \frac{1}{1+k}$$

II.4.b Calculs

On peut donc appliquer le théorème des probabilités totales avec le système complet d'évènement $[X = 0]$, $[X = 1]$,...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 1) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = 1) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{1}{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i+1)!} && \text{propriétés de la factorielle} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{i!} && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} - 1 \right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \right)
\end{aligned}$$

Exercice : Montrer que ce nombre peut bien être la probabilité d'un événement.

Exercice : Calculer la loi (conjointe) du couple (X, Y).

II.5 Transfert

Le théorème de transfert est aussi valide pour les couples de variables aléatoires discrètes.

Théorème 1.
Soit $(X,\ Y)$ *un couple de variables aléatoires discrètes et* $g\ :(x,y)\mapsto g(x,y)$ *une fonction définie sur l'ensemble* $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*
Alors

$$E(g(X,Y))=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])$$

sous réserve que cette dernière série converge absolument.

Exemple :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,\ 6\rrbracket)$ avec $n\geqslant 3$.

On va calculer $E(|X-Y|)$ qui existe car X et Y sont à support fini.

$$\begin{aligned}
E(|X-Y|) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|\mathbb{P}(X=i,Y=j) && \text{théorème de transfert avec } g\ :(x,y)\mapsto |x-y| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j|\mathbb{P}(X=i,Y=j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)\mathbb{P}(X=i,Y=j) + \sum_{j=i+1}^{n} -(i-j)\mathbb{P}(X=i,Y=j)\right] && \text{définition de } |.| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1} -(i-j)\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) + \sum_{j=i+1}^{n} (i-j)\mathbb{P}(X=i)(Y=j)\right] && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)\frac{1}{n^2} + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\frac{1}{n^2}\right] && \text{loi unforme} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)\frac{1}{n^2} + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\frac{1}{n^2}\right] && \text{loi unforme} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i-1}(i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\ell=1}^{i-1}\ell + \sum_{j=1}^{n-i} k\right] && \text{changement d'indice } \ell=i-j \text{ et } k=j-i \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(i-1)(i-1+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\right] && \text{formules du cours} \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)i + (n-i)(n-i+1)\right] \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[i^2 - i + n^2 - in + n - in + i^2 - i\right] \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[2i^2 - 2i - 2in + n^2 + n\right] \\
&= \frac{1}{2n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}2i^2 - \sum_{i=1}^{n}2i - \sum_{i=1}^{n}2in + \sum_{i=1}^{n}n^2 + n\right] \\
&= \frac{1}{2n^2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - (n)(n+1) - n^2(n+1) + n^3 + n^2\right] \\
&= \frac{n+1}{2n}\left[\frac{(2n+1)}{3} - 1\right] \\
& \frac{n+1}{\cdots}\left[\frac{(2n-2)}{\cdots}\right]
\end{aligned}$$

C'est bien une application du théorème de transfert, nous n'avons pas calculé la loi de $|X - Y|$ uniquement celle de (X, Y)

Exercice : Donner une situation réelle (par exemple un jeu) pour lequel $|X - Y|$ à un sens concret.

III Indépendance

III.1 Définition et propriétés

Définition 3 (indépendance de deux variables aléatoires discrètes)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace. probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes *si et seulement si*

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \forall y \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

On peut voir l'indépendance sur les tableaux précédents après avoir calculer les lois marginales. « Chaque case doit être le produit de la colonne et de la ligne ».

III.2 Méthodes

On doit se servir de la définition précédente de deux manières différentes.

1. Si l'énoncé précise que les deux variables aléatoires sont indépendantes, ou si c'est sous-entendu ("deux dés lancés", " deux tirages dans une même urne avec remise...."). Alors il faut utiliser la relation de la définition pour faire des calculs .
2. L'énoncé introduit deux variables aléatoires discrètes, et demande (éventuellement après plusieurs calculs) si ces deux variables aléatoires sont indépendantes ou non. Il faut alors vérifier si les égalités $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ sont vérifiées.
   Exemple : On lance deux dés non truqués. On note X le minimum des deux résultats et Y le maximum des deux résultats. Montrer que X et Y ne sont pas indépendants. Par exemple $[Y = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ donc $\mathbb{P}(Y = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. De même $[X = 6] = [X_1 = 6] \cap [X_2 = 6]$ donc $\mathbb{P}(X = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Mais $[X = 6] \cap [Y = 1] = \emptyset$ donc
   $$\mathbb{P}([X = 6] \cap [Y = 1]) \neq \mathbb{P}([X = 6])\mathbb{P}([Y = 1])$$

Rappels : Formulaire sur les lois discrètes usuelles

Cette partie est un rappel des résultats de l'année dernière.

Nom	Notation	Paramètre(s)	Support	Loi	Espérance	Variance
Certaine			$X(\Omega) = \{a\}$	$\mathbb{P}(X = a) = 1$	a	$V(X) = 0$
Bernoulli	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$p \in]0;\ 1[$	$X(\Omega) = \{0,\ 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q$	p	$p(1 - p)$
Uniforme sur $[\![1,\ n]\!]$	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,\ n]\!])$	$n \in \mathbb{N}^*$	$[\![1,\ n]\!]$	Pour $k \in [\![1,\ n]\!]$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Uniforme sur $[\![a,\ b]\!]$	$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,\ b]\!])$	$a < b$ deux entiers	$[\![a,\ b]\!]$	Pour $k \in [\![a,\ b]\!]$ $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1)}{12}$
Loi binomiale	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;\ 1[$	$X(\Omega) = [\![0,\ n]\!]$	Pour $k \in [\![0,\ n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Loi géométrique	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$p \in]0;\ 1[$	$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$	Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$X(\Omega) = \mathbb{N}$	Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Rappels : Formulaire sur séries classiques

- **Série de Riemann** Soit α un réel. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- **séries géométriques et dérivées** Soit q un réel les trois séries suivantes convergent si et seulement si $q \in]-1;\ 1[$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- **Série exponentielle** Quel que soit le réel x, la série suivante converge

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$