DL mathématiques n°1
Réponses

EML 1999

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes les unes des autres.

La lettre c désigne un entier naturel non nul fixé.

Une urne contient initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, c boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, où b et r sont des entiers naturels non nuls.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

RÉPONSE:

Comme le tirage est honnête

$$\boxed{\text{La probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage est } \frac{b}{b+r}}$$

*

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage ?

RÉPONSE:

Notons, pour i entier naturel non nul, B_i l'événement « la bille obtenue au tirage i est blanche »et R_i l'événement « la bille obtenue au tirage i est rouge »

Comme B_1, R_1 forment un système complet d'événements de probabiltés non nulles, en appliquant le théorème des probabilités totales

$$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(R_1)P_{R_1}(B_2)$$

Or

- $P(B_1) = \dfrac{b}{b+c}$ et $P(R_1) = \dfrac{r}{b+c}$
- Supposons réalisé l'événement B_1 alors au début du deuxième tirage, l'urne est composée de $b+c$ boules blanches et de r boules rouges et donc $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{b+c}{r+b+c}$

- Supposons réalisé l'événement R_1 alors au début du deuxième tirage, l'urne est composée de b boules blanches et de $r+c$ boules rouges et donc $P_{R_1}(B_2) = \dfrac{b}{r+b+c}$

On obtient donc

$$\begin{aligned} P(B_2) &= \frac{b}{b+r} \times \frac{b+c}{b+r+c} + \frac{r}{b+r} \times \frac{b}{b+r+c} \\ &= \frac{b(b+c)+rb}{(b+r)(b+r+c)} \\ &= \frac{b(b+c+r)}{(b+r)(b+r+c)} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B_2) = \frac{b}{b+r}}$$

*

(c) Si la deuxième boule est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

RÉPONSE:

On cherche, avec les notations introduites, à calculer $P_{B_2}(B_1)$La formule de Bayes

$$P_{B_2}(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\dfrac{b}{b+r} \cdot \dfrac{b+c}{b+c+r}}{\dfrac{b}{b+r}}$$

$$\boxed{P_{B_2}(B_1) = \frac{b+c}{b+c+r}}$$

*

2. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge et que $c=1$.
   Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
   (a) Déterminer $p(X_1=0)$ et $p(X_1=1)$ (i.e. la loi de X_1)

RÉPONSE:

Lors du premier tirage on ne peut obtenir au plus une boule blanche ce qui justifie le *i.e.* . $[X_1 = 0]$ "on a tiré aucune boule blanche lors du premier tirage est de probabilité $\frac{1}{2}$, de même $[X_1 = 1]$ "on a tiré une boule blanche lors du premier tirage est de probabilité $\frac{1}{2}$.

$$\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,\, 1 \rrbracket))}$$

$*$

(b) Déterminer $p(X_2 = 0), p(X_2 = 1)$ et $p(X_2 = 2)$.

RÉPONSE:

$[X_1 = 0]$, $[X_1 = 1]$ forme un système complet d'événement de probabilités toutes non nulles. En utilisant le théorème des probabilités totales, pour $i \in \llbracket 0,\, 2 \rrbracket$

$$P(X_n = i) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = i) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = i)$$

On doit donc déterminer les probabilités conditionnelles suivantes

- Si on suppose $[X_1 = 0]$ réalisé, alors on a tiré 0 boule blanche lors du premier tirage, et donc on a tiré une boule rouge. L'urne est donc composée de deux boules rouges et d'une boule blanche. On peut alors tirer une boule blanche avec une probabilité $1/3$ et alors $X = 2 = 0$ ou une boule rouge avec une probabilité $2/3$ et alors $X_2 = 1$

$$P_{X_1=0}(X_2 = 0) = \frac{2}{3} \qquad P_{X_1=0}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \qquad P_{X_1=0}(X_2 = 2) = 0$$

- Si on suppose $[X_1 = 1]$ réalisé, alors on a tiré 1 boule blanche lors du premier tirage. L'urne est donc composée de une boule rouges et 2 boules blanches. On peut alors tirer une boule blanche avec une probabilité $2/3$ et alors $X = 2 = 2$ ou une boule rouge avec une probabilité $1/3$ et alors $X_2 = 1$

$$P_{X_1=1}(X_2 = 0) = 0 \qquad P_{X_1=1}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}P_{X_1=1}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{3} \\ P(X_2 = 1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ P(X_2 = 2) &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,\, 2 \rrbracket)}$$

On peut aussi utiliser une expression des probabilités conditionnelles plus générale comme dans la réponse suivante

*

(c) Démontrer, par récurrence sur n, que : $\forall k \in [[0, n]], \quad p(X_n = k) = 1/(n+1)$

RÉPONSE:

Initialisation Pour $n = 1$ l formule est juste *cf* question 2.a.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Supposons que $X_n \hookleftarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,\, n \rrbracket)$.

Soit $i \in \llbracket 0,\, n \rrbracket$, supposons $[X_n = i]$ réalisé. Lors des n premiers tirages, nous avons tiré i billes blanches et donc $n - i$ billes rouges, l'urne est donc composée de 1+i billes blanches[1] et de $1 + (n - i)$ boules rouges. **Dans ces conditions** la probabilité de tirer une boule rouge(ce qui implique $X_n = X_{n+1}$) est de $\dfrac{1+n-i}{1+i+1+n-1} = \dfrac{1+n-i}{n+2}$ et la probabilité de tirer une boule blanche(ce qui implique $X_n + 1 = X_{n+1}$) est de $\dfrac{1+i}{1+i+1+n-1} = \dfrac{1+i}{n+2}$

$$\forall i \in \llbracket 0,\, n \rrbracket\, \forall j \in \llbracket 0,\, n+1 \rrbracket \qquad P_{X_n=i}(X_{n+1=j}) = \begin{cases} \dfrac{1+n-i}{n+2} & \text{si } j = i \\ \dfrac{1+i}{n+2} & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit[2] $j \in \llbracket 1,\, n+1 \rrbracket$, en appliquant le théorème des probabilités totales avec le SCE $(X_n = i)_{i \in \llbracket 0,\, n \rrbracket}$, dont les événements sont bien de probabilités non nulles

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_n = i) P_{X_n=i}(X_{n+1} = j) \\ &= P(X_n = j-1) P_{X_n=j-1}(X_{n+1} = j) + P(X_n = j) P_{X_n=j-1}(X_{n+1} = j) \end{aligned}$$

toutes les autres probabilités conditionnelles sont nulles

$$\begin{aligned} &= P(X_n = j-1) \frac{1+j-1}{n+2} + P(X_n = j) \frac{1+(n-j)}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{1+j-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{1+(n-j)}{n+2} && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} (1 + j - 1 + 1 + n - j) \\ &= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

1. car il y avait une boule blanche au départ et on en rajoute une à chaque fois que l'on tire une boule blanche
2. On va traiter le cas $j = 0$ à part

Si[3] $j = 0$, comme le support de $X_{n+1} = [\![0,\, n]\!]$

$$P(X_{n+1} = j) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \qquad \text{calculs précédents}$$
$$= 1 - \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

Ce qui démontre que $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,\, n+1]\!])$

Conclusion d'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in [\![0,\, n]\!]\ X_n \text{ suit la loi } \mathcal{U}([\![0,\, n]\!]).}$$

*

3. Pour tous entiers naturels non nul n, x et y, on note $u_n(x, y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche après n tirages, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

   (On admettra que c'est aussi la probabilité conditionnelle d'obtenir une boule blanche n tirages plus tard lorsque, à l'issue d'un tirage, l'urne contenait x boules blanches et y boules rouges.)

   (a) Montrer que en utilisant un système complet d'événements liés à l'issue du premier tirage, que, pour tout entiers naturels non nul n, x et y, on a :

$$u_{n+1}(x, y) = u_n(x + c, y) \cdot \frac{x}{x + y} + u_n(x, y + c) \cdot \frac{y}{x + y}$$

RÉPONSE:

On note $U_{n+1}(x, y)$ l'événement « d'obtenir une boule blanche après $n+1$ tirages, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges. »

On note B_1, (respectivement R_1) l'événement on tire une boule blanche (respectivement rouge) au premier tirgae, qui forment un système complet d'événements de probablités non nulles[4]. En utilisant le théorème des probabilités totales

$$P(U_{n+1}(x, y)) = P(B_1)P_{B_1}(U_{n+1}(x, y)) + P(R_1)P_{R_1}(U_{n+1}(x, y))$$

Or la composition initiale de l'urne étant x blanches et y rouges, et le tirage honnête

$$P(B_1) = \frac{x}{x+y} \quad P(R_1) = \frac{y}{x+y}$$

3. On peut aussi utiliser les proba totales
4. car x et y sont non nuls

De plus si on suppose que B_1 est réalisé, on rajoute alors c boules blanches alors avant le deuxième tirage l'urne est composée de $x+c$ boules blanches et r boules rouges, et l'indication de l'énoncé « On admettra que ... »signifie

$$P_{B_1}(U_{n+1}(x,y)) = u_n(x+c,y)$$

de même

$$P_{R_1}(U_{n+1}(x,y)) = u_n(x,y+c)$$

$$\boxed{\text{Pour } n,\ x \text{ et } y \text{ des entiers non nuls } u_{n+1}(x,y) = \frac{x}{x+y}u_n(x+c,y) + \frac{y}{x+y}u_n(x,y+c)}$$

*

(b) En déduire, par récurrence, que, pour tous entiers naturels non nuls n, x et y, on :

$$u_n(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\mathcal{H}_n \ : \qquad \forall x \in \mathbb{N}^*, \forall y \in \mathbb{N}^* \qquad u_n(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

On remarque que les quantificateurs de x et y sont inclus dans l'hypothèse de récurrence.

Initialisation Soit x et y deux entiers naturels non nuls $u_1(x,y) = P(B_1) = \dfrac{x}{x+y}$ la formule est vraie au rang $n=1$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{H}_n$ réalisée. C'est à dire que pour tout entiers naturels non nuls x et y

$$u_n(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

alors d'après la formule de la question précédente

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,y) &= \frac{x}{x+y}u_n(x+c,y) + \frac{y}{x+y}u_n(x,y+c) && \text{question précédente} \\ &= \frac{x}{x+y} \times \frac{x+c}{(x+c)+y} + \frac{y}{x+y} \times \frac{x}{x+(y+c)} \end{aligned}$$

hypothèse de récurrence est valable pour l'expression de $u_n(x+c,y)$ et $u_n(x,y+c)$ car elle inclue les quantificateurs universels $\forall$

$$\begin{aligned} &= \frac{x(x+c) + y \cdot x}{(x+y+c)(x+y)} \\ &= \frac{x(x+c+y)}{(x+y)(x+y+c)} \\ &= dfracxx+y \end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels non nuls } n, x \text{ et } y\text{, on : } u_n(x,y) = \tfrac{x}{x+y}}$$

*

Remarque :

- La rédaction de la récurrence n'est pas évidente car on est obligé d'inclure « $\forall x$,$\forall y$ »la proposition sur laquelle porte la récurrence.
- La probabilité de tirer une boule blanche ne dépend pas du tirage, ce n'est pas intuitif. Ce problème classique est nommé "urnes de Polya".

  Attention : Ce résultat ne signifie en aucun cas que les tirages sont indépendants. Par exemple supposons que $x = y = 1$, pour simplifier. Les résultats précédente permet de dire que
  $$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$$
  donc
  $$P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{4}$$
  mais
  $$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1+1}{(1+1)+1} = \frac{2}{6}$$
  ce qui démobntre que B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.