Algèbre linéaire

ECE 2 Lycée international de Valbonne

Septembre 2021

Table des matières

Ce que vous avez vu l'année dernière **2**

I Espaces vectoriels **2**
I.1 Définition . . . 2
I.2 Les espaces vectoriels de références . . . 3
I.2.a L'ensemble $\mathbb{R}^n$. . . . 3
I.2.b Les ensembles de matrices. . . . 3
I.2.c Les ensembles de fonctions . . . 4
I.3 Sous espaces vectoriels . . . 5
I.3.a Définitions et propriétés . . . 5
I.3.b Propriétés des sous espaces vectoriels . . . 6
I.3.c Les exemples classiques de sous espaces vectoriels . . . 6

II Applications linéaires **7**
II.1 Définitions . . . 7
II.2 Structure de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{L}(E,F)$ . . . 9
II.3 Noyaux et images . . . 10

III Familles particulières **12**
III.1 Bases . . . 12
III.2 Bases canoniques . . . 13
III.3 Familles libres et familles génératrices . . . 14

Ce que vous avez vu l'année dernière

L'année dernière vous avez étudié des ensemble de matrices. Un espace vectoriel est un ensemble où l'on peut y faire deux opérations l'addition et la multiplication par un réel (scalaire), que l'on regroupe sous forme de *combinaisons linéaires* c'est à dire des opérations du type $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot y$.

Une application linéaire est une application qui va d'un espace vectoriel dans un autre et qui est compatible avec la notion de combinaison linaire.

Exemple : Par exemple les ensembles $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à trois et à deux termes sont des espaces vectoriels de référence vu l'année dernière.

Mais vous avez déjà rencontré d'autres espaces vectoriels "naturels" et des applications linéaires.

- La combinaison linéaire de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'ensemble $\mathcal{C}^\infty$ est un espace vectoriel, et de plus tout vecteur (fonction) f et vecteur (fonction) g et pour tout couple de réels α et β

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

  Donc l'opération de dérivation est linéaire.
- La combinaison linéaire de deux matrices $n \times p$ est une matrice de même taille $n \times p$. L'ensemble des matrices $n \times p$ est un espace vectoriel.
- La combinaison linéaire de deux fonction continue sur $[0;\,1]$ est une fonction continue sur $[0;\,1]$. L'ensemble des fonctions continues est un espace vectoriel et Pour tout couple de fonction et tout couple de réel

$$\int_0^1 (\alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

  L'opération d'intégration est linéaire.

I Espaces vectoriels

I.1 Définition

La définition suivante est la définition complète d'un espace vectoriel.

Définition 1 (espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$)**.**

Un espace vectoriel *est un ensemble E, muni d'une loi interne "+" (la somme) et d'une loi externe "·" (la multiplication par un réel) qui vérifient*

1. *+ est associative et commutative* i.e.

$$\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \mathbf{v} \in E,\ \forall \mathbf{w} \in E \qquad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

2. *Il existe un élément dit* vecteur nul $\mathbf{0_E}$ *(noté plus tard* 0 *lorsqu'il n'y a pas ambiguitée) tel que*
$$\forall \mathbf{u} \in E \quad \mathbf{u} + \mathbf{0_E} = \mathbf{u}$$
3. *Tout élément de* E *a un opposé* i.e.
$$\forall \mathbf{u} \in E \quad \exists \mathbf{v} \in E \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0_E}$$
4. $$\forall \mathbf{u} \in E \quad 1_{\mathbb{R}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$
5. $$\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mu \cdot (\lambda \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}$$
6. $$\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\mu + \lambda) \cdot \mathbf{u} = (\lambda \cdot \mathbf{u}) + (\mu \cdot \mathbf{u})$$
7. $$\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \mathbf{v} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mathbf{u}) + (\lambda \cdot \mathbf{v})$$

Plutôt que de nous attarder sur cette définition, listons des ensembles qui sont des espaces vectoriels de référence.

I.2 Les espaces vectoriels de références

I.2.a L'ensemble $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1 (Structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$)**.**
Soit n *un entier naturel non nul L'ensemble* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \ldots\}$ *muni de l'addition*
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
et la multiplication par un réel
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$
est un espace vectoriel dont le vecteur nul est $(0, 0, \ldots, 0)$.

On décide parfois d'identifier les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices lignes à n composantes.

I.2.b Les ensembles de matrices.

Théorème 2 (Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)**.**
Soit p *et* n *deux entiers naturel non nuls et fixés.*

Alors l'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes* $\mathcal{M}_{n,p}$ *est un espace vectoriel lorsque l'on munit des opérations vu l'année dernière*

Le vecteur nul est la matrice qui ne contient que des zéros.

I.2.c Les ensembles de fonctions

Théorème 3 (Fonctions à valeurs réelles)**.**
Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble des applications muni des opérations naturelles est un espace vectoriel, dont la vecteur nul est la fonction constante nulle sur $\mathcal{D}$

Exercice 1.
Écrire les opérations naturelles.

Théorème 4 (Ensemble des fonctions polynomiales)**.**
L'ensemble des fonctions polynômiales est un espace vectoriel lorsqu'il est muni des opérations usuelles. Le vecteur nul est le polynôme nul.

Remarque : Nous écrirons, parfois, cette année les polynômes en suivant la convention suivante :

- X est la fonction d'une variable réelle $x \mapsto x$?
- X^2 est la fonction d'une variable réelle $x \mapsto x^2$
- X^n est la fonction d'une variable réelle $x \mapsto x^2$
- $X^0 = 1$ est la fonction constante $x \mapsto 1$

Exemple : Au lieu d'écrire
$$P \ : x \mapsto x^2 + 2$$
on écrira
$$P = X^2 + 2$$

Une polynôme s'écrit donc $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

Exercice 2.
Rappeler la définition et les propriétés du degré d'un polynôme.

Théorème 5 (Ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites)**.**
L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel lorsqu'il est muni des opérations usuelles. Le vecteur nul est la suite nulle.

Exercice : Écrire les opérations naturelles.

I.3 Sous espaces vectoriels

I.3.a Définitions et propriétés

Définition 2 (Sous-espaces vectoriels)**.**
*Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** si et seulement si*

- $0 \in F$.
- $\forall \mathbf{u} \in F, \forall \mathbf{v} \in F$ *on a* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$.
- $\forall \mathbf{u} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *on a* $\lambda \cdot \mathbf{u} \in F$.

Proposition 1 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.**
Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel si et seulement si

- $0 \in F$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in F, \forall \mathbf{v} \in F$ *on a* $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v} \in F$

Proposition 2 (Autre caractérisation d'un sous-espace vectoriel)**.**
Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel si et seulement si

- $0 \in F$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in F, \forall \mathbf{v} \in F$ *on a* $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$

Exercice 3.
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel associé ?

- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
- L'ensemble $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
- L'ensemble des polynômes qui se factorisent par $X - 1$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?
- L'ensemble des polynômes P tel que $P(1) = 1$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

Théorème 6 (Pour montrer une structure d'espace vectoriel)**.**
Soit E un $\mathbb{R}$-ev alors si F est un sous-espace vectoriel de E, F est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

Méthode montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Lorsque l'on étudie un sous ensemble A d'un ensemble de référence ($\mathbb{R}^n$, $R[X]$, ensemble des matrices $n \times p$) dont l'on sait qu'il est un espace vectoriel et que l'on vous demande de démontrer que A est un espace vectoriel,

1. On montre que $0 \in A$
2. On montre que A est stable par combinaisons linéaires(cf définition 2 ou proposition 1 ou 2).
3. On en conclut que A est un sous-espace vectoriel .
4. On en déduit que A est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

Exercice 4.
Montrer que l'ensemble des fonctions paires et un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Faire de même pour les fonctions impaires.

I.3.b Propriétés des sous espaces vectoriels

Théorème 7 (Intersection)**.**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et A B deux sous espaces vectoriels de E alors $A \cap B$ est un espaces vectoriel de E.

Démonstration :

Proposition 3.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ alors $\{0_E\}$ et E sont des sous espaces vectoriels de E.

I.3.c Les exemples classiques de sous espaces vectoriels

Théorème 8 (Fonctions continues, fonctions dérivables)**.**

Soit $k \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.

De même $\mathcal{C}^\infty(I)$ est sous espace vectoriel de l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 9.
*L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes dont le degré est **inférieur ou égal à** n est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

II Applications linéaires

II.1 Définitions

Définition 3 (application linéaire)**.**
Soit E et F deux espaces vectoriels et f une application de E vers F.
*Alors on dit que f est une **application linéaire** si et seulement si*

$$\forall \mathbf{u} \in E,\ \forall \mathbf{v} \in E,\ \forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}) =$$

Notations
On dit aussi que f est un **(homo)morphisme** d'espace vectoriel.
L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Exemple :

- La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $s(x, y) = (x + y, x - y)$ est une application linéaire.
- L'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & R^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z, z + y) \end{array}$$
est une application linéaire.
- La dérivation dans $\mathbb{R}[X]$:
$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array} \quad \text{est une application linéaire.}$$
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{C}^\infty(I) & \to & \mathcal{C}^\infty(I) \\ & \varphi & \mapsto & \varphi' \end{array} \quad \text{est une application linéaire.}$$

- L'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par $\varphi(x,y) \mapsto (x^2, -y)$ n'est pas linéaire.
- La transposition de matrice est une application linéaire de $\mathcal{M}_n$ dans lui même.

Proposition 4 (Premières propriétés)**.**
Soit E et F deux espaces vectoriels alors :

- *$f \in \mathscr{L}(E,F)$ alors $f(\mathbf{0_E}) =$.*
- *Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et si $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$..., $\mathbf{u_n}$ sont des vecteurs et λ_1,...,λ_n sont des scalaires :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \mathbf{u_i}\right) = \qquad .$$

Définition 4 (Applications linéaires particulières)**.**

- *Un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans lui même.*
  L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$
- *Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.*
- *Un **automorphisme** de E est un endomorphisme bijectif de E. L'ensemble des automorphismes de E est est noté $GL(E)$.*

Proposition 5 (Autres caractérisations de la linéarité)**.**
Soit f une application d'un espace-vectoriel E dans un espace-vectoriel F.
Alors « f est linéaire »est équivalente à chacune des deux propositions suivantes

1. un seul scalaire
$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mathbf{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) =$$
2. + et . traités séparément
$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mathbf{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \qquad et \qquad f(\lambda \mathbf{u}) =$$

Méthode linéarité d'une application

Si on vous demande de prouver qu'une application $f\ E \mapsto F$ est linéaire où l'on sait déjà que E et F sont des espaces vectoriels.

1. Il faut commencer par bien choisir les variables utilisées.
   Par exemple si on manipule des polynômes, on choisira comme vecteurs P et Q. Si on manipule des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (x, y)$ et $\mathbf{v} = (x', y')$. Dans $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{u} = (x, y, z)$ et $\mathbf{v} = (x', y', z')$. Si l'énoncé propose des notations, on essaye de les respecter.
2. On vérifie **l'une des deux** caractérisations de la proposition 5.
3. On commence par écrire,en remplaçant ∇ et $\square$ par les bonnes notations ; : Soit ∇ dans …et $\square$ dans …et λ un réel

$$
\begin{aligned}
f(\lambda\square + \square) &= && \text{on calcule } \lambda\square + \nabla \\
&= && \text{on utilise la définition de } f \text{ donnée dans l'énoncé} \\
&= && \text{on fait des simplifications} \\
&\vdots && \\
&= \lambda f(\square) + f(\nabla) && \text{sans tricher ! et en utilisant la définition de } f
\end{aligned}
$$

Méthode NON linéarité d'une application

Si on vous demande de prouver qu'une application **n'** est **pas** linéaire.

1. On commence par calculer $f(0)$, en utilisant bien le vecteur nul de l'espace vectoriel de départ. Si on a de la chance on constate que $f(0) \neq 0$ et on peut conclure que f n'est pas linéaire.
2. Si $f(0) = 0$ il faut continuer et chercher un contre-exemple à la linéarité
   - Soit trouver un scalaire λ et un vecteur $\square$ tels que $f(\lambda\square) \neq \lambda f(\square)$. On cherche souvent des contre-exemples simples, on commence pas essayer avec $\lambda = -1$,
   - Soit trouver deux vecteurs $\square$ et ∇ tels que $f(\square + \nabla) \neq f(\square) + f(\nabla)$. On cherche souvent des contre-exemples simples.

   Une fois le contre-exemple trouvé (il peut déjà être donné indirectement dans les questions précédentes !) on peut conclure que f n'est pas linéaire.

II.2 Structure de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition 6.
Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels, alors

$$\mathscr{L}(E,\ F) \text{ est un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel.}$$

Proposition 7 (composition).
Soit E, F et G trois $\mathbb{R}$ espaces-vectoriels.
Soit f une application linéaire de E vers F et g une application linéaire de F vers G, alors : $\circ$ *est une application linéaire de vers*

Proposition 8 (Bijection réciproque).
Soit f un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est une application linéaire de F dans E.

II.3 Noyaux et images

Définition 5 (Noyau et image).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- *On appelle **noyau** de f et on note Ker (f), l'ensemble défini par*

$$Ker\ (f) = \{\mathbf{v} \in E \quad / \quad f(\mathbf{v}) = \mathbf{0_F}\}$$

(Ker pour kern auf deutch *ou* kernel in english*)*

- *On appelle **image** de f et on note Im f, l'ensemble défini par*

$$Im\ f = \{\mathbf{w} \in F \quad / \quad \exists \mathbf{v} \in E\ , f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}\ .$$

Proposition 9 (structure du noyau et de l'image).
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors Ker (f) est un sous-espace vectoriel de et Im f est un sous-espace vectoriel de .

Démonstration :

Exemple :

- L'ensemble des suites définies par une relation de récurrence double
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
est le noyau de l'application linéaire
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$
- L'ensemble des applications définies et dérivables sur un intervalle I qui vérifient
$$\forall x \in I \quad f'(x) + x \cdot f(x) = 0$$
est le noyau de
$$\begin{array}{rccl} \Delta : & D(I) & \to & \mathbb{R}^I \\ & f & \mapsto & (x \mapsto xf(x) + f'(x)) \end{array}$$

Méthode (plus rare) pour montrer que F est un (sous)-espace vectoriel d'un espace vectoriel E

1. Si F est donné directement sous la forme d'un noyau $F = \text{Ker}\ \varphi$ et que l'on a montré précédemment que φ vous pouvez conclure par « F étant le noyau d'une application linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de E donc un espace vectoriel ».
2. Si F est donné par une écriture de la forme $F = \{\square \in / \cdots = 0\}$ on peut prendre l'initiative d'essayer de trouver une application linéaire φ telle que $F = \text{Ker}\ \varphi$

Méthode de rédaction pour le calcul du noyau de φ

Si on sait que φ est une application linéaire d'un espace vectoriel E dan un autre espace vectoriel.

- On commence par bien choisir les bonnes notations.
- Le début de la rédaction commence **obligatoirement par** « Soit $\square \in E$, $\square \in \text{Ker}\ \varphi$ si et seulement si $\varphi(\square) = 0$ »
- On remplace alors φ par la définition donnée dans l'énoncé
- On raisonne avce des si et seulement si ou des $\Leftrightarrow$ en résolvant l'équation apparu au point précédent jusqu'à obtenir la forme la plus simple possible.

Exercice 5.
Calculer les noyaux et les images des applications suivantes
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} =^3 [X] \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x+z, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x+y-z \end{array}$$

Proposition 10 (lien entre noyau et injectivité)**.**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors

$$f \text{ est injective si et seulement si } Ker\,(f) = \{0_E\}.$$

Démonstration :

III Familles particulières

III.1 Bases

Vocabulaire
Dans la suite le mot **famille** désignera une suite ordonnée et dénombrable de vecteurs ou de scalaires.

Définition 6 (base)**.**
Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots)$ une famille de vecteurs.
*On dit que $\mathscr{B}$ est **une base** de E si et seulement si* **tout vecteur** *$v \in E$ peut s'écrire* **de manière unique** *comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.*
C'est à dire que pour tout vecteur $\mathbf{v} \in E$ il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_1,\, \lambda_2,\, \dots,\, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et n vecteurs $\mathbf{e_{i_1}}, \dots, \mathbf{e_{i_n}}$ de $\mathscr{B}$ tels que :

$$\mathbf{v} = x_1 \cdot \mathbf{e_{i_1}} + x_2 \cdot \mathbf{e_{i_2}} + \cdots + x_n \cdot \mathbf{e_{i_n}}.$$

Exercice 6.

- En résolvant un système linéaire, montrer que $P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$ n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
  Aide : Poser $P = a + bX + cX^2$ et chercher à résoudre l'équation $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$ où les inconnues réelles sont α, β et γ et $P = aX^2 + bX + c$ est un paramétre.

- En résolvant un système linéaire, montrer que $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 2 + X - X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + X^2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Question : Peut on construire plusieurs bases de $\mathbb{R}_2[X]$? Combien ? Donner des exemples.

Définition 7 (Coordonnées d'un vecteur)**.**
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n})$ une base de E. Alors tout vecteur $\mathbf{v}$ de E s'écrit de manière unique

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e_1} + \cdots + x_n\mathbf{e_n} \ \textit{avec}\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

*Les coefficients x_i sont **les coordonnées** de $\mathbf{v}$ dans la base $\mathscr{B}$.*

Exercice 7.
$E = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (-1, 0, 2),\ v_3 = (2, 4, -3)$ et $v_4 = (1, 1, 1)$.
Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3} - 2\mathbf{v_4}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Méthode pour vérifier qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel E

Si on vous demande de prouver que $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}\dots$,$\mathbf{u_n}$ est une base d'un espace vectoriel E.

- On commence par choisir des notations adaptées.
- On commence la réponse obligatoirement par « Soit $\square \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels »en introduisant autant de réels qu'il y a de vecteurs dans la famille.
- On écrit « résolvons l'équation $\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_n\mathbf{u_n} = \square$
- on résout cette équation en sachant que $\square$ est un paramètre et que les inconnues sont les $\lambda_1, \dots \lambda_n$.
- On raisonne avec des $\Leftrightarrow$ ou des si et seulement si car on résout une équation. Très souvent l'équation doit être transformée en un système en première étape.
- Si un problème apparaît (une infinité de solution ou pas de solution dans certains cas) on peut conclure "la famille n'est pas une base de E
- Si on arrive à résoudre le système et qu'il n'y a qu'une solution pour chaque λ_1 λ_2,$\dots\lambda_n$ alors on peut conclure « la famille est une base de E »(et éventuellement « les coordonnées de $\square$ dans cette base sont $\lambda_1 = \dots$, $\lambda_2 = \dots$,$\dots\lambda_n = \dots$ »)
- Selon l'énoncé on peut éventuellement se contenter de montrer que le système admet une unique solution par exemple « système échelonné à coefficient diagonaux non nuls. »)

III.2 Bases canoniques

Pour certains espaces très étudiés la base la plus simple est dite **base canonique**.

- Pour $\mathbb{R}^2$ la base canonique est $\mathbf{e_1} = (1, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1)$.

- Pour $\mathbb{R}^3$ la base canonique est $\mathbf{e_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1,0)$ et $\mathbf{e_3} = (0,0,1)$.
- Dans le cas général la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\dots,\mathbf{e_n})$ où pour tout $i \in \{1,2,\dots,n\}$ $\mathbf{e_i}$ est le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1.
- La famille $(X^i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dite base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Une base de l'ensemble des matrices carrées 2×2 est $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et

  $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Dans le cas général la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}$ est $(E_{i,j})_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,p\}}}$ où $E_{i,\ j}$ est la matrice ne contenant que des zéros sauf un 1 en position (i,j).

Exercice 8.
Écrire explicitement la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de $\mathbb{R}_5[X]$ et de $\mathcal{M}_{3,2}$

III.3 Familles libres et familles génératrices

Définition 8 (famille génératrice)**.**
Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{G} = (\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\dots,\mathbf{e_p})$ une famille de p vecteurs de E.
On dit que cette famille est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\forall \mathbf{v}\in E,\qquad \exists\lambda_1\in\mathbb{R},\ \dots,\ \exists\lambda_p\in\mathbb{R},\quad \textit{tels que}\quad \lambda_1\cdot\mathbf{e_1}+\lambda_2\cdot\mathbf{e_2}+\cdots+\lambda_p\cdot\mathbf{e_p} = \mathbf{v}.$$

Exercice 9. 1. Soient $\mathbf{u} = (1,1,0)$ et $\mathbf{v} = (1,0,1)$, la famille $\mathscr{F} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

2. La famille $\mathscr{F} = ((1,1,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1))$ est-elle une famille de vecteurs génératrice de $\mathbb{R}^4$?
3. La famille $\mathscr{F} = (1-X^2, 1+X, 1-2X+X^2, 3-X^2)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$?
4. La famille $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est elle une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans certains cas, l'espace engendré par la famille n'est pas tout l'espace vectoriel.

Définition 9 (Sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)**.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(\mathbf{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E
On note

$$\text{Vect}\left((\mathbf{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x_i} \text{ où } (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une famille de scalaires}\right\}$$

L'ensemble Vect $\left((\mathbf{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaire des vecteurs $\mathbf{x_i}$.
Alors
Vect $\left((\mathbf{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E. On le désigne sous le nom de ***(sous) espace vectoriel engendré*** *par la famille $(\mathbf{x_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.*

Méthode pour montrer que F est un (sous)-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et/ ou trouver une famille génératrice de F

Si F est donné par une formule de la forme

$$F = \{\text{« une expression qui dépend de } a, b, \ldots \text{»} / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cdots\}$$

et que l'on vous demande de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et/ou de trouver une famille génératrice de F
Il faut "séparer" les paramètres a b,...pour écrire

$$F = \{a\square + b\nabla + \cdots / a, b \text{ réels }\} = \text{Vect}\left(\underbrace{\square, \nabla, \ldots}_{\text{il n'y a plus ni de } a \text{, ni de } b \text{ ni}\ldots}\right)$$

On peut alors conclure que

- F est unsous-espace vectoriel de E
- la famille $\square$, ∇,...est une famille génératrice de F

Cette méthode peut être suivie d'une autre méthode pour trouver une base voir page 18

Méthode pour trouver le sous-espace vectoriel engendré par une famille

Si on vous demande de calculer Vect $(\mathbf{u_1}, \cdots \mathbf{u_n})$ où $\mathbf{u_1}, \cdots \mathbf{u_n}$ sont des vecteurs donnés d'un espace vectoriel E .

- On commence par choisir les notations adaptées à l'espace vectoriel.
- On commence obligatoirement la réponse par « Soient $\square$ dans E, et λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ des réels cherchons à résoudre l'équation
$$\square = \lambda_1 \mathbf{u_1} + \lambda_2 \mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_n \mathbf{u_n}$$
»
- on résout cette équation avec des $\Leftrightarrow$ ou des si et seulement si . Les inconnues sont les réels λ_1,…,λ_n. et $\square$ un paramètre. Cette équation est souvent transformée en un système d'équations.
- Lors de la résolution de cette équation le but n'est pas temps de trouver les solutions pour λ_1,…, λ_n mais de faire apparaître une ou des conditions de compatibilité qui conditionne l'existence de solutions.
- On conclut
$$\text{Vect}\,(\mathbf{u_1}, \cdots \mathbf{u_n}) = \{\square \in E / \square \text{ vérifie la condition trouvée}\}$$
- on enchaîne souvent par la méthode de la page 15 pour trouver une famille génératice de ce sous-espace vectoriel et par la méthode de la page 18 pour en trouver une base.

Exercice :

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, Vect $((1,0,0),(0,1,0)) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad z = 0\right\}$.
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $E_{i,i}$ les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1, Vect $((E_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n})$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 11 (caractérisation d'une famille génératrice)**.**
Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{G} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p})$ une famille de p vecteurs de E.
Cette famille est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$Vect\,(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p}) = E$$

Définition 10 (famille libre et famille liée)**.**
Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{F} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p})$ une famille de p vecteurs de E.
*On dit que cette famille est **libre** si et seulement si :*
$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ldots, \forall \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda_1 \cdot \mathbf{e_1} + \lambda_2 \cdot \mathbf{e_2} + \cdots + \lambda_p \cdot \mathbf{e_p} = 0_E) \Longrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{R}}).$$

C'est à dire que la seule décomposition du vecteur nul est la combinaison linéaire où tous les scalaires sont nuls.
Si une famille de vecteurs n'est pas libre on dit qu'elle est ***liée****.*

Exercice 10. 1. À quelle condition une famille de deux vecteurs forme-t'elle une famille libre ?

2. Les polynômes $X-1$, $X-2$ et $X-3$ forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?

Proposition 12 (Caractérisation des familles liées)**.**
Soit $\mathscr{F} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p})$ *une famille d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E*. La famille* $\mathscr{F}$ *est liée si et seulement si un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres, c'est à dire qu'il existe* $i_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ *et des scalaires* $(\lambda_i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ i\neq i_0}}$ *tels que*

$$\mathbf{e_{i_0}} = \lambda_1\mathbf{e_1} + \lambda_2\mathbf{e_2} + \cdots + \cancel{\lambda_{i_0}\mathbf{e_{i_0}}} + \cdots + \lambda_p\mathbf{e_p} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ i\neq i_0}} \lambda_i\mathbf{e_i}.$$

Attention : On ne sait pas quel vecteur s'exprime comme une combinaison linéaire des autres.

Exercice 11. 1. Montrer que si une famille contient le vecteur nul elle est liée.

2. Montrer que si une famille comporte deux fois le même vecteur elle est liée.

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est libre

Si on vous demande de prouver que $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}\ldots$,$\mathbf{u_n}$ est une famille libre d'un espace vectoriel E.

- On commence par choisir des notations adaptées.
- On commence la réponse obligatoirement par « Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels »en introduisant autant de réels qu'il y a de vecteurs dans la famille.
- On écrit « résolvons l'équation $\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + \cdots + \lambda_n\mathbf{u_n} = 0$
- on résout cette équation en sachant que □ est un paramètre et que les inconnues sont les $\lambda_1, \ldots\lambda_n$.
- On raisonne avec des $\Leftrightarrow$ ou des si et seulement si car on résout une équation. Très souvent l'équation doit être transformée en un système en première étape.
- Si on arrive à résoudre le système et que l'unique solution pour chaque variable est $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0$,$\ldots\lambda_n = 0$ alors on peut conclure « la famille est libre »
- si on trouve d'autres solutions que la solution nulle on peut conclure « la famille est liée ».

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est liée

Si l'on vous demande de montrer qu'une famille est liée

- **A essayer en premier** On peut deviner une combinaison linéaire « évidente »entre les vecteurs donnés.
- Si on ne trouve aucune combinaison linéaire évidente on utilise la méthode générique précédente.

Exercice 12.
Étudier si les familles suivantes sont des bases de l'espace vectoriel, génératrices ou libres

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. $1 + X, 1 - X, 1 + X + X^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$

Théorème 10 (lien entre base, famille libre et famille liée)**.**
Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathscr{B}$ est une base de E.*
2. *$\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de E.*

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est une base de E.

Si l'on a déjà démontré qu'une famille est libre et génératrice de E il suffit d'indiquer que c'est une base de E

Méthode pour trouver une base de E.

On cherche une famille génératrice avec la méthode « pour trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel E »e la page 15 et l'on vérifie que la famille trouvée est libre avec la méthode « Méthode pour montrer qu'une famille donnée est libre »de la page 17.

Compétences et Savoir-faires

À la fin de ce cours vous devez savoir

Reconnaitre un sous espace vectoriel.

Étudier la linéarité d'une application.

Calculer un noyau et une image d'une application linéaire.

Proposer une base pour des espaces vectoriels, notamment les noyaux et les images.

Vérifier si une famille donnée est libre, génératrice, une base d'une espace vectoriel E.