

SUITES ET SÉRIES

Limite de Suites

Exercice 1.

Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $\ln \left(\frac{n+1}{n^2+1} \right) \frac{1}{n}$
2. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} (\ln(n^2+n) - \ln(n^2))$
3. $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$
4. $\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$
5. $(1+n)^{\frac{n}{1+n^2}}$
6. $\frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Séries

Exercice 2.

Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$
2. $\sum \frac{1}{n \cdot \sqrt{n} + 1}$

3. $\sum \frac{1}{n! + n^2}$
4. $\sum \frac{e^n}{n^{100}}$
5. $\sum \frac{n^{4/9}}{3^n}$
6. $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$

Exercice 3 (Plus dur).

Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \frac{n}{(\ln n)^n}$
2. $\sum \frac{(n!)^2}{e^{n^2}}$
3. $\sum \frac{n^2}{(2n-1)!}$

Exercice 4 (Calcul de sommes).

Calculer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n \geq 2} \ln \left(\frac{1+n}{n-1} \right)$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Dans chacun des cas écrire une fonction scilab

fonction `y = sommeapartielle(n)` qui calcule la somme partielle de rang n .

Exercice 5 (Plus dur).

Calculer la somme des séries suivantes.

1. $u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad (n \geq 0)$

$$2. \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$$

Exercice 6 (Convergence absolue).

Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

$$1. \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$2. \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)}$$

$$3. 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

$$4. \frac{1}{8} - \frac{2}{12} + \frac{3}{16} - \frac{4}{20} + \dots$$

$$5. \sum \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$6. \sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

Exercice 7 (Convergence absolue).

Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

$$1. \sum \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$$

$$2. \sum \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^n$$

$$3. \sum \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$$

$$4. \sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$$

$$5. \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

$$6. \sum \frac{(-1)^n}{n^{1/n}}$$

$$7. \sum (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$$

$$8. \sum \frac{(-1)^n n}{e^n}$$

$$9. \sum \frac{(-1)^n}{n!}$$

Exercice 8.

Calculer la somme des séries dont le terme général est

$$1. \frac{n^2 - n}{(n+3)!}$$

$$2. \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}$$

Calcul de séries liées aux probabilités

Exercice 9 (Loi géométrique).

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0; 1[$.

Rappeller le support de X ainsi que la loi de X .

Montrer que X admet une espérance et la **calculer**

Montrer que $X(X-1)$ admet une espérance et la **calculer**

En déduire que X admet une variance et la calculer

Exercice 10 (Loi de Poisson).

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $p \in \mathbb{R}_+^*$.

Rappeller le support de X ainsi que la loi de X .

Montrer que X admet une espérance et la **calculer**

Montrer que $X(X-1)$ admet une espérance et la **calculer**

En déduire que X admet une variance et la calculer

Exercice 11.

On suppose que X est une variable aléatoire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n$$

ou $p \in]0; 1[$.

1. Montrer que cette formule définit une loi de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer

Problèmes

Suites définies par récurrence

Exercice 12.

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0; 1/4]$. Montrer que pour tout $u_n \in [0; 1/4]$ puis que (u_n) est croissante.
3. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
4. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
5. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?

Exercice 13 (Suite récurrente et fonction logarithme).

On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u .
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 14 (EML 1996).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) Montrer que f est paire.
Étudier les variations de f e
(b) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier :
 $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$)

(c) Montrer que pour tout réel x : $|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .
- (d) Ecrire un programme Scilab permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 15.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 - u_n}$$

1. Écrire une fonction `function y=suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Méthode 1
Utilisation d'une suite auxiliaire :
Considérons la suite auxiliaire $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, par
$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

(a) Démontrez que v est une suite géométrique.

- (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.

3. Méthode 2.

Utilisation d'une inégalité :

- (a) Montrez que la suite u vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$

- (b) En déduire que u converge et déterminez sa limite.
- (c) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $] -10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 16 (suite définie par récurrence et série!).

Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0; 1[$.
2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Exemples de suites définies implicitement

Exercice 17 (D'après EDHEC 1997).

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \cdot \ln(x).$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

- (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.

- (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, 1 < u_n < e$.
- (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
- (c) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 18 (D'après EDHEC 2008).

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in$

$$\mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + n x.$$

1. (a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
- (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
- (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.
- (c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
- (d) En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.

Exercice 19 (Sans indication!).

Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution x_n . Étudier la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autres

Exercice 20.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$$

1. Écrire une fonction `function y=suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Montrer que $\lim u_n = +\infty$
3. Trouver une relation simple entre u_n et u_{n+1} .
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \sqrt{n}$ et que $u_n = o(\sqrt{n})$
5. Trouver un équivalent simple de (u_n) .
6. Trouver la limite de $u_n - \sqrt{n}$

Exercice 21.

On pose pour n entier strictement plus grand que 1

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k}$$

1. Montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. La série converge-t-elle absolument ?