

Intégrales impropres

ECE 2 Lycée international de Valbonne



11 octobre 2021

Table des matières

I Définitions et propriétés	2
I.1 Rappels de première année	2
I.2 Extension à un intervalle du type $]a; b]$ ou $[a; b[$.	3
I.3 Convergence absolue	4
II Intégrales de fonctions positives	5
II.1 Généralités	5
II.2 Comparaisons	6

I Définitions et propriétés

I.1 Rappels de première année

Définition 1 (Intégrale impropre en $+\infty$).

Soit f une fonction continue sur $[a; +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe et est réelle.}$$

On note alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \dots$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Définition 2 (nature d'une intégrale).

Déterminer la nature d'une intégrale c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Exercice 1.

Parmi les intégrales suivantes lesquelles convergent et lesquelles divergent ?

1. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

2. $\int_0^{+\infty} e^t dt$

Théorème 1 (Intégrales classiques $(+\infty)$).

- **Intégrales de Riemann.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si

- **Exponentielles.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si



Attention : Á connaître et à savoir démontrer !

Définition 3 (Intégrale convergente sur $\mathbb{R}$).

On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si pour $a \in \mathbb{R}$ les intégrales $\int_{-\infty}^a f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont convergentes.

On note alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt =$$

Exercice : En choisissant bien le "a" Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-1|} dt$$

I.2 Extension à un intervalle du type $]a; b]$ ou $[a; b[$.

Dans cette partie nous prolongeons les définitions de première année pour pouvoir étudier la convergence des intégrales du type $\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \sqrt{t}}$

Définition 4 (Intégrale sur un intervalle $]a; b]$).

Soit f une fonction continue sur $[a; b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$$

existe et est réelle.

On note alors :

$$= \int_a^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exercice 2.

Montrer que

- $\int_0^1 dt/t$ diverge

- $\int_0^1 dt/\sqrt{t}$ converge.

Théorème 2 (Intégrales de référence).

- Soit α un réel et b une constante strictement positive. L'intégrale de Riemann $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si
- L'intégrale $\int_0^1 \ln t \, dt$ est convergente et vaut -1 .



Attention : Il faut bien faire attention à la différence entre les intégrales de Riemann entre 0 et 1 et celles entre 1 et $+\infty$, vues l'année dernière.

Définition 5 (Intégrale sur un intervalle $[a; b]$).

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ converge si et seulement si la limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) \, dt$$

existe et est réelle.

On note alors

$$= \int_a^b f(t) \, dt$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale diverge.

Exemple : $\int_{-1}^0 dt/t^2$ est divergente.

I.3 Convergence absolue

Définition 6 (Convergence absolue).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ (avec b un réel ou $+\infty$) on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ converge abso-

lument si et seulement si l'intégrale

converge.

Théorème 3 (lien entre convergence absolue et convergence).

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b[$ (avec b un réel ou $+\infty$), on suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument alors cette intégrale converge. On a de plus

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

II Intégrales de fonctions positives

II.1 Généralités

Proposition 1 (Intégrale en fonction d'une des bornes).

Si f est une fonction continue sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$ et telle que

$$\forall t \in [a; b[\quad f(t) \geq 0$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : [a; b[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est $\nearrow$, elle admet donc une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers b .

Si f est une fonction continue sur $]a; b]$ avec a un réel ou $-\infty$ et telle que

$$\forall t \in]a; b] \quad f(t) \geq 0$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} F :]a; b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_x^b f(t) dt \end{aligned}$$

est $\searrow$, elle admet donc une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers a .

D'après les théorèmes vus l'année dernière, dans ce cas là pour l'intégrale converge il suffit de vérifier si elle est minorée ou majorée. Plus précisément :

Théorème 4 (Condition de convergence).

1. Soit f une fonction continue positive sur $[a; b[$. On suppose qu'il existe M tel que

$$\forall x \in [a; b[\quad \int_a^x f(t) \, dt \leq M$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ est convergente.

2. Soit f une fonction continue positive sur $]a; b]$. On suppose qu'il existe m tel que

$$\forall x \in]a; b] \quad m \leq \int_x^b f(t) \, dt$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ est convergente.

II.2 Comparaisons



Les trois théorèmes suivants vont nous servir toutes l'année !

Attention : Il est indispensable de vérifier que les fonctions étudiées sont à valeurs positives et de le faire apparaître clairement dans vos réponses.

Théorème 5 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas des inégalités).

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

Dans ce cas là

- Si $\int_a^b g(t) \, dt$ converge. Alors $\int_a^b f(t) \, dt$ converge aussi.
- Si $\int_a^b f(t) \, dt$ diverge. Alors $\int_a^b g(t) \, dt$ diverge aussi.

Ce théorème s'adapte aux autres cas d'intégrales impropres.

Théorème 6 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas de la relation d'équivalence).

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\quad 0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq g(t)$$

On suppose de plus que

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$$

Alors $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ ont même nature.

Ce théorème s'adapte aussi aux autres cas d'intégrales impropres.

Théorème 7 (Théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions à valeurs positives : cas de la relation de négligeabilité).

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a; b[\quad 0 \leq f(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq g(t)$$

et telles que

$$f(x) =_b o(g(x))$$

Dans ce cas là :

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge aussi.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge aussi.

Autres cas

Lorsqu'une intégrale est impropre en plus d'un point il faut « découper » cette intégrale.

Exemple :

- Pour étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$, il faut étudier les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$
- Pour étudier la nature de $\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$, il faut étudier les intégrales $\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$ et $\int_{-1/2}^0 \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$ et $\int_0^{1/2} \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$ et $\int_{1/2}^1 \frac{1}{(x+1)x(x-1)} dx$

Savoir et Savoir-faires

À la fin de ce cours vous devez

Connaître les critères de convergences pour les intégrales de références Riemann, exponentielles.

Démontrer une convergence en utilisant les relations de comparaisons $\sim$ et $o()$ et $\leq$.

Calculer une intégrale impropre en utilisant les techniques IPP et changement de variable. On fera bien attention à la rédaction/