COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES : COMPLÉMENTS

Les techniques utiles

Exercice 1.
x, y et z désignent des réels.

1. Montrer que $x+y = \max(x,y)+\min(x,y)$
2. Montrer que $\max(x,y,z) = \max(\max(x,y),z)$
3. Montrer que $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
4. Trouver une formule analogue pour $\max(x,y)$

Exercice 2.
On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires. Le but de cet exercice est de « commencer » à calculer la loi de $X+Y$. Compléter les formules suivantes

1. **Exemple** Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [X+Y=n] = \bigcup_{j=0}^{n} [X=j] \cap [Y=n-j] = \bigcup_{j=0}^{n} \cdots$$
et dans cette union les événements sont incompatibles deux à deux.
2. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
4. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ alors ...
5. Si $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ alors ...

Exercice 3 (Maximum de trois vad, minimum de trois vad)**.**
Soit X, Y et Z trois vad de support $\mathbb{N}$ en s'inspirant du cours donner une méthode pour calculer $\min(X,Y,Z)$ et $\max(X,Y,Z)$

Exercice 4.
On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que
$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$
Compléter la formule suivante
$$\text{Cov}\,(X,Y) = \left(\sum\sum x_? y ? \mathbb{P}(?)\right) - E(X)E(Y)$$

Somme, max, min

Exercice 5.
On lance deux pièces qui donnent pile avec la probabilité $p \in]0;\,1[$.
On lance la première pièce jusqu'au premier pile et on note X_1 le rang du premier pile pour la première pièce. On prend la deuxième pièce et on la lance jusqu'à obtenir un pile et on note X_2 le rang d'apparition du premier pile .

1. Analyse dy sujet : X_1 et X_2 sont elles indépendantes ? Qu'elles sont leur loi.
2. Calculer la loi de $X_1 + X_2$
3. Calculer $\mathbb{P}_{X_1+X_2=n}(X_1 = k)$
4. Analyse du sujet : Décrire une expérience avec des dès qui nous ferait à faire le même type de calcul

Exercice 6.

Soit X et Y deux variable aléatoires discrètes indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité de l'évènement

$$\max(X,Y) = \min(X,Y)$$

Exercice 7 (Trois lois de Bernoulli)**.**
Soit A, B et C trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p\,]0;\,1[$.

1. Calculer la loi de ABC
2. A et ABC sont elles indépendantes ?

Exercice 8 (Trois lois uniformes)**.**
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires suivant la même loi uniforme sur $[\![1,\,n]\!]$. On suppose de plus qu'elles sont indépendantes.

1. Calculer la loi de $\max(X,Y,Z)$.
2. Quelles sont les valeurs prises par $X+Y$?
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k \in [\![2,\,n]\!] \\ \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k \in [\![n+1,\,2n]\!] \end{cases}$$
4. Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.

Exercice 9.
Soit p et r deux réels de $]0;\,1[$, et

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \qquad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant k)$.
2. En déduire la loi de $\min(X,Y)$
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant Y)$
4. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces.

Calculs des espérances et variances des loi usuelles

Exercice 10 (loi uniforme)**.**
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,\,n]\!])$.

1. Calculer $E(X)$.
2. En utilisant la formule de Koenig-Huyggens calculer $V(X)$
3. $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,\,b]\!]$ où a et b sont deux entiers telles que $a < b$. Trouver deux entiers p et n tels que $Y = Z + p$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,\,n]\!])$
4. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

Exercice 11 (Loi binomiale)**.**
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

1. Démontrer que pour tout entier k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n$
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
2. Utiliser la formule précédente pour calculer $E(X)$
3. Donner une formule analogue à celle de la question 1 pour $k(k-1)\binom{n}{k}$.
4. En déduire $E(X(X-1))$
5. En déduire $V(X)$

Exercice 12 (Loi de Poisson)**.**
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $E(X)$
2. Calculer $E(X(X-1))$
3. En déduire $V(X)$

Exercice 13 (Loi géométrique)**.**
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

1. Calculer $E(X)$
2. Calculer $E(X(X-1))$
3. En déduire $V(X)$

Covariance et ρ.

Exercice 14.
Soit A et B deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([\![1,\ n]\!])$

1. Simplifier $[A+B=2n]\cap[A-B=0]$
2. En déduire que $A+B$ et $A-B$ ne sont pas indépendantes
3. Montrer $\text{cov}(A+B, A-B) = V(A)-V(B)$
4. $A+B$ et $A-B$ sont elles corrélées ?

Exercice 15.
Soit X une variable aléatoire suivante la loi uniforme sur $[\![1,\ n]\!]$. Soit z une variable aléatoire suivant la loi donnée par :

$$z(\Omega)=\{-1,\ 1\} \qquad \mathbb{P}(z=-1)=\mathbb{P}(z=1)$$

On suppose que X et z sont indépendantes et on note

$$Y = zX$$

1. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. Calculer Cov (X, Y) et $\rho(X, Y)$.
4. Conclusion ?

Exercice 16.
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre λ.

1. Donner la loi de $X+Y$ et la loi de $Y+Z$
2. Calculer la covariance de $X+Y$ et $Y+Z$
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de $X+Y$ et $Y+Z$

Exercice 17.
La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ et la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(X, p)$ où p est un réel fixé appartenant à $]0;\ 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}_{X=j}(Y=i)$. On distinguera les cas $i \leqslant j$ et $i > j$.
2. En déduire la loi du couple (X, Y).
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
4. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre d'échec. Montrer sans calcul que Z suit une loi de Poisson de paramètre λq.
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.
6. Montrer que $V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$.
7. En déduire $\text{cov}(X, Y)$.
8. Que vaut $\text{cov}(X, Z)$?

Suites de vad

Exercice 18 (Somme de loi de Bernoulli)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Quelle est la loi de $X_1+\cdots+X_n$?

Exercice 19 (Somme de lois binomiales)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi binomiale $\mathcal{B}(?, ?)$.
Quelle est la loi de $X_1+\cdots+X_n$?

Exercice 20 (Somme de lois Poisson)**.**
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$.
Quelle est la loi de $X_1+\cdots+X_n$?

Exercice 21.
Soit X_1, X_2, ...X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $m = \min(X_1X_2, \ldots, X_n)$ et $M = \max(X_1X_2, \ldots, X_n)$.
On note $q = 1-p$, et k désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_i > k) = q^k$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m > k)$ et en déduire la loi de m.
3. Calculer $E(m)$.
4. Calculer la loi de M.

Exercice 22.
On répartit aléatoirement m boules dans n urnes. On suppose que $m \geqslant 4$ et $n \geqslant 3$. Les urnes sont numérotées de 1 à n et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i contient au moins une boule à la fin de l'expérience et 0 sinon.

1. Analyse du sujet Comment interpréter l'énoncé « répartit aléatoirement... » ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_i = 0)$, en déduire la loi de X_i
3. Calculer $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$)
4. Calculer Cov (X_i, X_j).
5. X_i et X_j sont elles indépendantes
6. Analyse du sujet décrire une expérience qui nous ferait faire le même type de calculs.

Exercice 23.
Une urne contient n_1 boules portant le numéro 1, n_2 boules portant le numéro 2 et n_3 boules portant le numéro 3. On effectue k tirages avec remise et no note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de boules 1 obtenues, X_2 le nombre de billes 2 obtenues et X_3 le nombre de billes 3.

1. Donner les lois des variables X_1, X_2, X_3 ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$ et en déduire cov(X_1, X_2).
3. Que peut on dire du signe de cette covariance ?
4. Calculer $\rho(X_1, X_2)$.
5. On suppose maintenant que $n_2 = n_1$ et $n_3 = 0$. Que vaut alors $\rho(X_1, X_2)$

Exercice 24.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1,\ 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0;\ 1[$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

1. Déterminer les lois de Y_2 et Y_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
3. En déduire la loi de Y_n .
4. Calculer, pour tout $n \in N$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?
6. Écrire une fonction `simulationY(n,k)` en Scilab pour simuler la variable aléatoire Y_n.

Exercice 25.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1,\ 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0;\ 1[$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

et on note B_i une variable aléatoire suivant la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$

1. Trouver deux réels a et b tel que $X_i = aB_i + b$
2. Trouver la loi de S_n, donner son espérance et sa variance.
3. Ecrire une fonction `simulationS(n,p)` en Scilab pour simuler la loi de S_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(S_n, S_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles S_n et S_{n+1} sont indépendantes ?

Pour aller plus loin

Exercice 26.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit N un variable aléatoire indépendante des précédentes qui suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ On note pour tout entier

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Pour n fixé donner la loi de S_n.
2. On pose $Y = S_N$. Donner $\mathbb{P}_{N=n}(Y = k)$
3. En déduire la loi de Y.
4. Bonus reprendre l'exo pour $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Exercice 27.
Soit X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variance non nulle.. Pour tout t on pose

$$\varphi(t) = V(X + tY)$$

1. Montrer que φ est toujours positive.
2. Trouver trois réels α, β et γ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

3. Montrer que $\beta^2 - 4\alpha\beta \leqslant 0$
4. En déduire $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$
5. On suppose que $\rho = 1$ en déduire une relation entre X et Y.
6. La réciproque est elle juste ?